H* - ALGEBRE

LORENA TUFAN
Universitatea Spiru Haret, Facultatea de Matematică-Informatică,
tufanl @ yahoo.com

Rezumat: În această comunicare în primul paragraf voi demonstra că orice H* – algebră este o sumă ortogonală de ideale închise, iar în al doilea paragraf voi prezenta construcția unor H* – algebre.

Cuvinte cheie: produs scalar, topologie, ideal închis, spațiu Hilbert

1. INTRODUCERE

H* – algebrele au fost introduse şi studiate de Ambrose [2] în cazul asociativ, iar teoria a fost extinsă în cazul particular al algebrelor neasociative Lee [6, 7] şi Jordan [8, 9]. O contribuție importantă au avut şi Cuermica şi Rodriguez [5].

2. H* - ALGEBRE CU INVOLUȚIE

Notăm cu K corpul numerelor reale sau corpul numerelor complexe.

Definiția1. *Se numeşte algebră liniară şi asociativă peste corpul K un spațiu vectorial A peste corpul K împreună cu o aplicație* $(x, y) \rightarrow xy$ *definită pe* $A \times A$ *care îndeplineşte următoarele axiome:*

a) $x(yz) = (xy)z$ *(asociativitate)*
b) $x(y + z) = xy + yz$ (1)
$(x + y)z = xz + yz$
c) $(\alpha x)y = x(\alpha y)$
pentru oricare $x, y, z \in A$ *şi* $\alpha \in K$

Remarca 1. *Axioma (c) este echivalentă cu* $(\alpha\beta)\ (xy) = (\alpha x)\ (\beta y)$ *pentru oricare* $x, y \in A$ *şi oricare* $\alpha, \beta \in K$.

În această lucrare toate algebrele vor fi considerate neasociative, iar corpul K va fi considerat ca fiind corpul numerelor complexe.

Definiția 2. *Se numeşte algebră cu involuție sau* $*$ *– algebră o algebră A pe care s-a definit o aplicație* $x \rightarrow x^*$ *care satisface următoarele axiome:*
a) $(x + y)^* = x^* + y^*$
b) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$ (2)
c) $(x^*)^* = x$

Analele Universității SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

d) $(xy)^* = y^*x^*$
pentru oricare $x, y \in A$.

Definiția 3. *Se numeşte H^* – algebră o algebră A împreună cu o involuție * numită involuția H^* – algebrei A, algebră pe care s-a definit un produs scalar ce satisface următoarea axiomă:*

$$\langle xy, z\rangle = \langle x, zy^*\rangle = \langle y, x^*z\rangle \tag{3}$$

împreună cu care A este spațiu Hilbert.

Propoziția 1. *Fie A o H^* – algebră. Produsul $(x, y) \to xy$ al lui $A \times A$ în A este o funcție continuă.*

Demonstrație: Fie (x_n) şi (y_n) două şiruri de elemente din A astfel încât $x_n \to x$ şi $y_n \to y$ în A.

$$\begin{aligned}\|x_n y_n - xy\| &= \|(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + (x_n - x)y\| \\ &\le \|x_n - x\|\|y_n - y\| + \|x\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \to 0\end{aligned} \tag{4}$$

Deci $x_n y_n \to xy$.

Definiția 4. *Fie A o algebră şi δ o involuție pe A. Definim mulțimile:*

$H := \{x \in A | \delta(x) = x\}$ (mulțimea elementelor δ-hermitiene) (5)
$S := \{x \in A | \delta(x) = -x\}$ (mulțimea elementelor δ-skew-herm) (6)
H şi S sunt subspații vectoriale ale lui A şi $A = H \oplus S$.

Fie (A, δ) o H^* – algebră cu involuție. Evident structura de spațiu Hilbert a algebrei A determină pe A o topologie. Spunem că H^* – algebra A este *simplu δ – topologică* dacă produsul $(x, y) \to xy$ este nenul, iar A nu are ideale proprii nenule δ – invariante care să fie închise în topologia considerată.

Prin *familie uniformă de H^* – algebre* înțelegem o familie $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de H^* – algebre care are proprietatea că există M şi N numere reale pozitive astfel încât

$$\|x_\lambda y_\lambda\| \le M\|x_\lambda\|\|y_\lambda\| \text{ şi } \|x_\lambda^*\| \le N\|x_\lambda\| \tag{7}$$

pentru oricare $\lambda \in \Lambda$ şi oricare $x_\lambda, y_\lambda \in A$. Aceste două condiții puse asupra familiei de H^*-algebre $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ sunt suficiente pentru a defini o structură de H^*-algebră pentru algebra $A = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, algebră pentru care spațiul Hilbert este l^2 – suma spațiilor $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, unde prin H_λ am notat spațiul Hilbert al lui A_λ. Mai mult, dacă δ_λ este o involuție pe H^* – algebra A_λ, atunci există un număr real pozitiv P astfel încât

$$\|\delta_\lambda(x_\lambda)\| \le P\|x_\lambda\| \tag{8}$$

pentru oricare $\lambda \in \Lambda$ şi oricare $x_\lambda \in A_\lambda$. În aceste condiţii spunem că $\{(A_\lambda, \delta_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ este *o familie uniformă* de H* – algebre cu involuţie, iar l^2 – suma familiei $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ este acum în mod natural o H^* - algebră cu involuţie.

Teorema 1. *Fie (A, δ) o H^*–algebră cu involuţie. Presupunem că Ann(A) = (0). Atunci (A, δ) este o l^2 – sumă a unei familii uniforme de H^* – algebre cu involuţie $\{(A_\lambda, \delta_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ astfel încât $(A_\lambda, \delta_\lambda)$ este simplu δ_λ – topologică pentru oricare $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstraţie. Din [5, Propoziţia 2.5] orice ideal închis al lui A este * – invariant, aşa că notăm cu $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familia tuturor idealelor închise ale lui A. Atunci A este l^2 – suma familiei uniforme de H^* – algebre $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ [5, Teorema 1]. Cum δ este un antiautomorfism al lui A pentru fiecare $\lambda \in \Lambda$ există $\lambda' \in \Lambda$ astfel încât $\delta(B_\lambda) = B_{\lambda'}$, deci sau $\lambda = \lambda'$ sau B_λ şi $B_{\lambda'}$ sunt ortogonale. Oricum, în ambele cazuri $B_\lambda + B_{\lambda'}$ este un ideal minimal δ – invariant închis al lui A. Considerăm acum pe mulţimea Λ echivalenţa:

$$\lambda = \mu \Leftrightarrow B_\lambda + B_{\lambda'} = B_\mu + B_{\mu'} \tag{9}$$

Astfel pentru λ aparţinând noii mulţimi Λ definim $A_\lambda = B_\lambda + B_{\lambda'}$ şi definim δ_λ pe A_λ ca fiind restricţia lui δ la A_λ. Este evident că $\{(A_\lambda, \delta_\lambda)\}$ este o familie uniformă de H^* – algebre cu involuţie care satisface teorema.

Remarca 2: *Dacă B este un ideal al unei H^* – algebra A, din axioma (3) rezultă că complementul său ortogonal $B^\perp$ este un ideal închis al lui A.* Ca o consecinţă a acestui fapt, datorat teoremei proiecţiilor ortogonale pentru spaţii Holbert, este faptul că *orice ideal închis al lui A este un sumand direct în A*. Acest rezultat se aplică în particular pentru a obţine o versiune îmbunătăţită a „Teoremei principale a lui Wedderburn's": orice H^* – algebră A este o sumă ortogonală a două ideale închise A = B ⊕ Ann (A) unde Ann (A)= $\{x \in A \mid xA=0\} = \{Ax=0\}$.

3. **CONSTRUCŢIA UNOR H* - ALGEBRE**

Fie A şi B două H^* – algebre. Presupunem că B este de dimensiune finită. Atunci produsul tensorial de algebre B ⊗ A poate fi structurat ca o H^* - algebră având următorul produs scalar şi următoarea involuţie:

$$\langle y_1 \otimes x_1, y_2 \otimes x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle \langle x_1, x_2 \rangle \tag{10}$$

$$(y \otimes x)^* = y^* \otimes x^* \tag{11}$$

Ca o consecinţă, dacă n este număr natural şi A este o H^* – algebră, algebra $M_n(A)$ a tuturor matricelor cu n linii şi n coloane peste A este o H^* – algebră definită după cum urmează. Considerăm identificarea $M_n(A) = M_n(C) \otimes A$ unde A este o H^* – algebră, iar $M_n(C)$ are o structură de H^* – algebră dată de:

$$\left(\lambda_{ij}\right)^* = \overline{\lambda}_{ij} \tag{12}$$

$$\left\langle \left(\lambda_{ij}\right), \left(\mu_{ij}\right) \right\rangle = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\, \overline{\mu}_{ij} \tag{13}$$

Definiția 5. *O H^* – algebră Spinger este o algebră comutativă A cu element unitate e, împreună cu o formă biliniară simetrică nedegenerată (,) : $A \times A \to C$ care are următoarele proprietăți:*

a) (xy, z) = (x, yz), pentru oricare $x, y, z \in A$
b) $Q(x^2) = Q(x)^2$, oricare ar fi $x \in A$ cu proprietatea (x, e) = 0 (14)
c) $Q(e) = \frac{3}{2}$

unde $Q(x) := \frac{1}{2}(x, x)$, pentru oricare $x \in A$.

Exemplul 1: Fie A o H^* – algebră comutativă cu element unitate e. Definim pe $A \times A$ cu valori în C o formă biliniară simetrică nedegenerată, astfel:

$$(x, y) \to \langle x, y^* \rangle \tag{15}$$

H^* – algebra împreună cu această formă biliniară simetrică este o H^* – algebră Springer.

Propoziția 2. *Fie A o H^* – algebră Springer*
i) Pentru oricare $x \in A$ avem

$$x^3 - T_s(x)x^2 + S_s(x)x - N_s(x)e = 0 \tag{16}$$

unde

$$T_s(x) := (x, e)\ ;\ S_s(x) := \frac{1}{2}(x, e)^2 - Q(x) \tag{17}$$

şi

$$N_s(x) := \frac{1}{6}(x, e)^3 - Q(x)(x, e) + \frac{1}{3}(x^2, x) \tag{18}$$

ii) Dacă pentru oricare $x, y \in A$ definim

$$x \times y = 2xy - (x, e)y - (y, e)x - (x, y)e + (x, e)(y, e)e \tag{19}$$

atunci $N_s(x, y, z) = (x, y\times z)$ pentru oricare $x, y, z \in A$ (unde N_s este unica formă triliniară simetrică definită pe A cu proprietatea $N_S(x) = \frac{1}{6}N_S(x,x,x)$ *pentru oricare $x\in A$) şi $(x^{\#})^{\#} = N_s(x)$ pentru oricare $x\in A$ (unde $x^{\#}: = \frac{1}{2}(x\times x)$).*

Demonstraţie. i) Din axioma (c) a definiţiei 3.1. obţinem că $\left(x - \frac{1}{3}(x,e)e, e\right) = 0$ pentru oricare $x \in A$. Aplicând axioma (b) a definiţiei 3.1. pentru această relaţie obţinem

$$Q\left(\left(x-\frac{1}{3}(x,e)e\right)^2\right) = \left[Q\left(x-\frac{1}{3}(x,e)e\right)\right]^2 \qquad (20)$$

ceea ce este echivalent cu:

$$Q(x^2) = Q(x) + (x,e)\left\{\frac{2}{3}(x^2,x) - (x,e)Q(x) + \frac{1}{3\cdot 2^2}(x,e)^3\right\} \qquad (21)$$

de unde rezultă în mod evident i)

ii) Acest punct se demonstrează prin simple calcule folosind doar definiţiile noţiunilor introduse anterior.

Definiţia 6. *Fie X şi Y spaţii vectoriale peste corpul numerelor complexe. Fie o formă biliniară nedegenerată $T : X \times Y \to C$ Fie aplicaţiile $(,) : X \times X \to Y$;*

$(x_1, x_2) \to x_1 \times x_2$ şi $(,) : Y \times Y \to X$, $(y_1, y_2) \to y_1 \times y_2$ astfel încât aplicaţiile $(x_1, x_2, x_3) \to N(x_1, x_2, x_3): = T(x_1, x_2\times x_3)$ şi $(y_1, y_2, y_3) \to M(y_1, y_2, y_3): = T(y_1\times y_2, y_3)$ sunt forme simetrice triliniare nenule definite pe X respectiv pe Y, care satisfac proprietăţile:

$$(x^{\#})^{\#} = N(x)x \text{ şi } (y^{\#})^{\#} = M(y)y \text{ pentru orice } x\in X \text{ şi orice } y\in Y \qquad (22)$$

unde $x^{\#}:=\frac{1}{2}(x\times x)$, $y^{\#}: = \frac{1}{2}(y\times y)$, $N(x):=\frac{1}{6}N(x,x,x)$ *şi* $M(y):=\frac{1}{6}M(y,y,y)$.

Atunci spunem că (T, N, M) este un triplet admisibil pe (X, Y).

Definiţia 7. *Se numeşte algebră structurabilă o H^* – algebră A împreună cu o involuţie δ, care are proprietăţile:*

$$\begin{aligned} &a)\ (s, x, y) = -(x, s, y) = (x, y, s)\\ &b)\ (a, b, c) - (c, a, b) = (b, a, c) - (c, b, a)\\ &c)\ \frac{2}{3}[[a^2,a],b] = (b,a^2,a) - (b,a,a^2)\end{aligned} \qquad (23)$$

pentru orice x, y $\in$ A, s$\in$S şi a, b, c $\in$ H. Am notat cu $(\cdot, \cdot, \cdot)$ (respectiv $[\cdot,\cdot]$) asociatorul (comutatorul) definite pe A.

Propoziția 3. *Fie (T, N, M) un triplet admisibil pe (X, Y). Atunci spațiul vectorial:* $\left\{\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} \mid x \in X, y \in Y\right\}$ *cu produsul*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & x_1 \\ y_1 & \beta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 & x_2 \\ y_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + T(x_1, y_2) & \alpha_1 x_2 + \beta_2 x_1 + y_1 \times y_2 \\ \alpha_2 y_1 + \beta y_2 + x_1 \times x_2 & T(x_2, y_1) + \beta_1\beta_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

şi cu involuția $\delta\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & x \\ y & \alpha \end{pmatrix}$ *este o algebră structurabilă.*

Mai mult, fără a lua în seamă involuția, această algebră este şi simplă.

Demonstrație. Faptul că acest spațiu vectorial este o algebră structurabilă se demonstrează prin calcul folosind definițiile.

În continuare arătăm că algebra este simplă. Avem egalitățile:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \\
\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{25}$$

Din aceste egalități rezultă că dacă I este ideal nenul al algebrei A, atunci I conține pe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu $x \neq 0$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ cu $y \neq 0$ şi $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ atunci şi $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ pentru oricare $x \in X$, deoarece $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Analog dacă $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I$, atunci şi $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in I$ pentru oricare $y \in Y$. Deci I conține întotdeauna sau pe $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pentru $x \neq 0$ sau pe $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ pentru $y \neq 0$. În acest caz, cum T este nedegenerată şi

Analele Universității SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(x,y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T(x,y) \end{pmatrix} \tag{26}$$

rezultă că I îl conține şi pe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ care este elementul unitate, deci I este egal cu întreg spațiul.

Teorema 2. *Fie A o H^* – algebră Springer. Pentru oricare x, y $\in$ A definim:*

$$x \times y = 2xy - \langle x, e\rangle y - \langle y, e\rangle x - \langle x, y^*\rangle e + \langle x, e\rangle\langle y, e\rangle e \tag{27}$$

Atunci spațiul vectorial

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in C, x, y \in A \right\} \tag{28}$$

împreună cu produsul

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & x_1 \\ y_1 & \beta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 & x_2 \\ y_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \langle x_1, y_2^*\rangle & \alpha_1 x_2 + \beta_2 x_1 + y_1 \times y_2 \\ \alpha_1 y_2 + \beta_1 y_2 + x_1 \times x_2 & \langle x_2, y_1^*\rangle + \beta_1\beta_2 \end{pmatrix} \tag{29}$$

împreună cu produsul scalar:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 & x_1 \\ y_1 & \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & x_2 \\ y_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \alpha_1\overline{\alpha}_1 + \beta_1\overline{\beta}_2 + \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle \tag{30}$$

împreună cu involuția H^* – algebrei

$$\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}^* := \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & y^* \\ x^* & \overline{\beta} \end{pmatrix} \tag{31}$$

şi împreună cu involuția

$$\delta\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \beta & x \\ y & \alpha \end{pmatrix} \tag{32}$$

*este o H^* – algebră structurabilă simplu topologică a cărei involuție este o * – involuție, adică* $\delta\left(\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}^*\right) := \left(\delta\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}\right)^*$

Analele Universității SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

Demonstrație. Din propoziția 3.3. ii şi din propoziția 3.6. rezultă că fără a face referire la produsul scalar şi la involuția H^* – algebrei, B este o algebră structurabilă simplă. Restul rezultă prin calcule.

BIBLIOGRAFIE

1. B.N. Allison, *A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan oalgebras*, Math. Ann. 237 (1979), 133-156.
2. W. Ambrose, *Structure theorems for a special Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 364-386
3. M. Cabrera, J. Martinez, A. Rodriguez, *Structurable H^* – algebras J. Algebra* 147 (1992), 19-62.
4. M. Cabrera, A. El. Marrakchi, J. Martinez, A. Rodriguez, *An Allison-Kantor-Koecher-Tits Construction for Lie H^* – algebras J. Algebra* 164 (1994), 361-408.
5. J. A. Cuenica, A. Rodriguez, *Structure theory for noncomulative Jordan H^* – algebras*, J. Algebra 106 (1987), 1-14.
6. J. R. Schue, „*Hilbert space methods in the Theory of Lie Algebras*", Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 68-80.
7. J.R. Schue, *Carton decompositions for L^* – algebras*, Travs. Amer. Math. Soc. 98 (1961), 334-349.
8. C. Viola Devapakkiam, *Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras*, I, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 78 (1975), 293-300.
9. C. Viola Devapakkiam, P. S. Rema, *Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras*, II, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 79 (1976), 307-319

Abstract This paper treats the problem of H* – algebra. This concept was introduced and studied by Ambrose in the associative case and then the theory was extended by Lee and Jordan in nonassociative case.

The paper contents two paragraphs:

1) H* – algebra with involution

2) The construction of some H* – algebras.

The first paragraphs starts with the definition of a H* – algebra, goes on with some properties of it and ends with an important theorem which says that any H* – algebra is an orthogonal summ of closed ideals.

The second paragraph contents two parts: in the first one are presented two exemples of H* – algebra (the tensorial product of algebras and the matrix algebra). In the second one are introduced the notions of Springer H* – algebra and structurable H* – algebra, some of their presents and a result which says that if we have a Springer H* – algebra we can construct a simple topological structurable H* – algebra.