

UTILIZAREA METODEI PERTURBAȚIILOR LA REZOLVAREA PROBLEMEI TRAGERII BENZILOR FOLOSIND O TEOREMĂ DE MEDIE

Lector dr. RODICA IOAN

*Universitatea Spiru Haret, Facultatea de Matematică-Informatică,
rodicaioan27@hotmail.com*

Rezumat: Această comunicare prezintă o soluție a problemei tragerii benzilor, utilizând o teoremă de medie, care permite simplificarea semnificativă a problemei. Rezultatele obținute sunt practic identice cu cele din lucrarea [1].

Cuvinte cheie: metoda perturbațiilor, numărul Bingham, tragere benzi, teoremă de medie, tensiune de tragere .

1. INTRODUCERE

În aceasta lucrare am abordat o metodă locală pentru rezolvarea problemei tragerii benzilor la rece printr-o matriță convergentă, ca și în lucrarea [1], folosind o metodă aproximativă și anume dezvoltarea în serie de puteri a unor funcții necunoscute în raport cu un parametru mic - numărul lui Bingham. În soluția problemei dată în [1] apar câteva integrale eliptice, care, după cum știm, nu se pot integra decât numeric. Pentru evitarea apariției acestora în rezolvarea problemei, am folosit în aceasta lucrare o teoremă de medie, care a permis o simplificare importantă a problemei, rezultatele obținute fiind practic identice cu cele din [1].

2. SOLUȚIA PROBLEMEI

Banda este împărțită în trei zone (Fig. 1). În zonele I și II corpul are o mișcare de corp rigid în direcția axei Ox, în timp ce zona III, mărginită de cele două plane înclinate și de cele două suprafețe S_1 și S_2 (ce vor fi determinate), este regiunea unde are loc defomarea vâscoplastică.

Presupunem că mișcarea este incompresibilă și în absența forțelor masice, ecuațiile problemei în coordonate polare (r, θ) sunt :

Ecuatiile Cauchy de mișcare

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (t_{rr} - t_{\theta\theta}) &= \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right), \\ \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} t_{r\theta} &= \rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Ecuția de continuitate

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (2)$$

Ecuțiile constitutive

$$\begin{aligned} t_{rr} &= -p + \left(2\eta + \frac{k}{\sqrt{II_d}} \right) d_{rr}, \\ t_{\theta\theta} &= -p + \left(2\eta + \frac{k}{\sqrt{II_d}} \right) d_{\theta\theta}, \quad II_v > k^2 \\ t_{r\theta} &= \left(2\eta + \frac{k}{\sqrt{II_d}} \right) d_{r\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

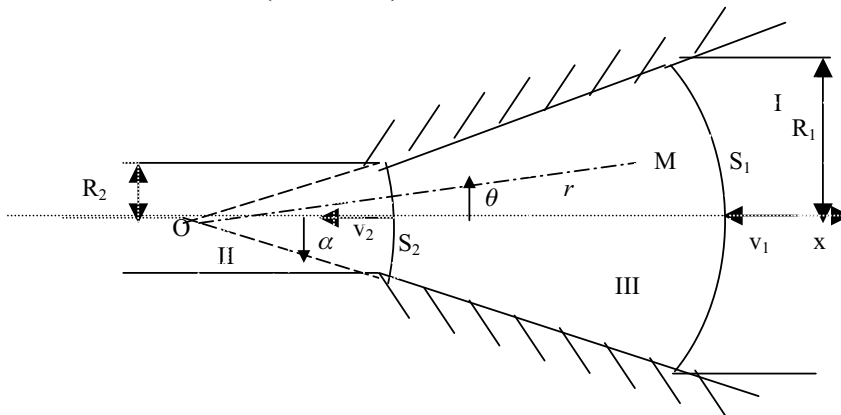


Fig. 1 Geometria procesului de tragere

și

$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \quad d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \quad (4)$$

unde

$$II_d = \frac{1}{2} (d_{rr}^2 + d_{\theta\theta}^2 + 2d_{r\theta}^2). \quad (5)$$

În relațiile (1)-(5) am folosit notațiile: \mathbf{t} este tensorul tensiunilor, p este presiunea, η coeficient de vâscozitate dinamică a materialului, k cea de a doua constantă a materialului, numită limita de curgere la forfecare pură, \mathbf{d} tensorul vitezelor de deformație, $II_{\mathbf{d}}$ al doilea invariant al vitezelor de deformație, $II_{\mathbf{v}}$ al doilea invariant al tensorului deviator al tensiunilor, v_r și v_θ sunt componentele vectorului viteză.

Ecuțiile anterioare au loc în regiunea $-\alpha < \theta < \alpha$; $r_2(\theta) < r < r_1(\theta)$, unde $r_1 = r_1(\theta)$ este ecuația suprafeței S_1 și $r_2 = r_2(\theta)$ este ecuația suprafeței S_2 .

Introducem noile cantități

$$r = r^0 R_2, \quad v_r = v_r^0 v_2, \quad v_\theta = v_\theta^0 v_2, \quad p = p^0 \frac{\eta v_2}{R_2}, \quad (6)$$

unde indicele "0" arată variabilele adimensionale. Cu ele sistemul (1)-(4) devine

$$\begin{aligned} t_{rr}^0 &= -p^0 + \left(2 + \frac{\text{Bg}}{\sqrt{II_{\mathbf{d}}}} \right) d_{rr}^0, \quad t_{\theta\theta}^0 = -p^0 + \left(2 + \frac{\text{Bg}}{\sqrt{II_{\mathbf{d}}}} \right) d_{\theta\theta}^0, \\ t_{r\theta}^0 &= -p^0 + \left(2 + \frac{\text{Bg}}{\sqrt{II_{\mathbf{d}}}} \right) d_{r\theta}^0, \\ d_{rr}^0 &= \frac{\partial v_r^0}{\partial r^0}, \quad d_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r^0} \frac{\partial v_r^0}{\partial r^0} + \frac{v_r^0}{r^0}, \quad d_{r\theta}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r^0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta^0}{\partial r^0} - \frac{v_\theta^0}{r^0} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Ecuția de continuitate devine

$$\frac{\partial v_r^0}{\partial r^0} + \frac{1}{r^0} \frac{\partial v_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{v_r^0}{r^0} = 0. \quad (8)$$

Ecuțiile de echilibru (1)₁ și (1)₂ se rescriu astfel

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{rr}^0}{\partial r^0} + \frac{1}{r^0} \frac{\partial t_{r\theta}^0}{\partial \theta} + \frac{1}{r^0} (t_{rr}^0 - t_{\theta\theta}^0) &= \text{Re} \left(v_r^0 \frac{\partial v_r^0}{\partial r^0} + \frac{v_\theta^0}{r^0} \frac{\partial v_r^0}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^0}{r^0} \right), \\ \frac{\partial t_{r\theta}^0}{\partial r^0} + \frac{1}{r^0} \frac{\partial t_{\theta\theta}^0}{\partial \theta} + \frac{2}{r^0} t_{r\theta}^0 &= \text{Re} \left(v_r^0 \frac{\partial v_\theta^0}{\partial r^0} + \frac{v_\theta^0}{r^0} \frac{\partial v_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{v_r^0 v_\theta^0}{r^0} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

unde am notat $Re = \frac{\rho v_2 R_2}{\eta}$ numărul lui Reynolds, iar $Bg = \frac{kR_2}{\eta v_2}$ este numărul lui Bingham.

În cele ce urmează, presupunem că $Re \ll 1$ și $Bg < 1$ și apoi vom neglija în sistemul (9) termenii inerțiali.

Introducem potențialul $\Psi = \Psi(r, \theta) = R_2 v_2 \Psi^0(r^0, \theta)$.

Dezvoltăm în serii de puteri funcțiile $\Psi^0(r^0, \theta)$ și $p^0(r^0, \theta)$ de forma

$$\begin{aligned}\Psi^0(r^0, \theta) &= \Psi_0^0(\theta) + Bg \Psi_1^0(r^0, \theta) + \frac{Bg^2}{2} \Psi_2^0(r^0, \theta) + \dots, \\ p^0(r^0, \theta) &= p_0^0(r^0, \theta) + Bg p_1^0(r^0, \theta) + \frac{Bg^2}{2} p_2^0(r^0, \theta) + \dots,\end{aligned}\tag{10}$$

unde

$$\Psi_0^0(\theta) = a\theta + \frac{b}{2} \sin 2\theta, \quad \Psi_1^0(r^0, \theta) = r^{02} \varphi(\theta),\tag{11}$$

cu

$$\varphi(\theta) = A\theta + \frac{B}{2} \sin 2\theta + D + \frac{E}{2} \cos 2\theta + K_1(\theta) \cos 2\theta + K_2(\theta) \sin 2\theta\tag{12}$$

și

$$\begin{aligned}K_1(\theta) &= -\frac{1}{2} \int_0^\theta f(t) \sin 2t dt, \quad K_2(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\theta f(t) \cos 2t dt, \\ f(t) &= \frac{b \sin 2t}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2t}} + 2 \int_0^t \frac{a + b \cos 2\tau}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\tau}} d\tau\end{aligned}\tag{13}$$

și revenind la variabile dimensionale, obținem

$$\begin{aligned}\Psi(r, \theta) &= R_2 v_2 \left(a\theta + \frac{b}{2} \sin 2\theta \right) + \frac{k}{\eta} r^2 \varphi(\theta) + O(Bg^2), \\ v_r(r, \theta) &= \frac{R_2 v_2}{r} (a\theta + b \cos 2\theta) + \frac{k}{\eta} r \varphi'(\theta) + O(Bg^2), \\ v_\theta(r, \theta) &= -\frac{2k}{\eta} r \varphi(\theta) + O(Bg^2).\end{aligned}\tag{14}$$

Expresia (13) conține integrale eliptice de primul tip, integrale care se integrează numeric. Pentru eliminarea acestui neajuns, mediem expresia

$$E(\theta) = a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\theta, \text{ pentru } \theta \in (-\alpha, \alpha)\tag{15}$$

astfel

$$E(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} (a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\theta) d\theta \quad (16)$$

care, după o serie de calcule devine

$$E(\alpha) = a^2 + b^2 + \frac{ab \sin 2\alpha}{\alpha}. \quad (17)$$

și

$$\varphi(\theta) = A'\theta + \frac{B'}{2} \sin 2\theta - \frac{b}{2\sqrt{E(\alpha)}} \theta \cos 2\theta. \quad (18)$$

unde

$$A' = A + \frac{a}{2\sqrt{E(\alpha)}}, \quad B' = B + \frac{b-a}{2\sqrt{E(\alpha)}} \quad (19)$$

Notând cu X^I și X^{II} contraforța, respectiv forța de tragere, avem

$$\begin{aligned} \frac{X^I}{4\eta v_2} &= \frac{R_1}{R_2} \left\{ -\frac{R_2^2}{R_1^2} (a + 2b \cos^2 \alpha) - \frac{c}{2} + \text{Bg} \left[A \left(1 - \ln \frac{R_1^2}{R_2^2 \sin^2 \alpha} \right) + B - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2\sqrt{E(\alpha)}} (a + b(2\alpha \cot \alpha + \cos 2\alpha)) \right] \right\}, \\ \frac{X^{II}}{4\eta v_2} &= \sin^2 \alpha (a + 2b \cos^2 \alpha) + \frac{c}{2} - \text{Bg} \left[A \left(1 - \ln \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) + B - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\sqrt{E(\alpha)}} (a + b(2\alpha \cot \alpha + \cos 2\alpha)) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

iar pentru componentele rezultantei forței pe suprafața matriței $\theta = \pm\alpha$, $r_2(\alpha) \leq r \leq r_1(\alpha)$ obținem

$$\begin{aligned} T &= 4\eta v_2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_1}{R_2} \left\{ -\frac{R_2}{R_1} b \sin 2\alpha \sin \alpha + \frac{\text{Bg}}{\sin \alpha} \left[-B \sin 2\alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2\sqrt{E(\alpha)}} (a \sin 2\alpha + 2b\alpha \cos 2\alpha) \right] \right\}, \\ N &= 4\eta v_2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_1}{R_2} \left\{ \frac{R_2}{R_1} a \sin \alpha - \frac{c}{2 \sin \alpha} + \frac{\text{Bg}}{\sin \alpha} \left[-B \cos 2\alpha + \right. \right. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A}{R_1 - R_2} \left(R_1 \left(1 - \ln \frac{R_1^2}{R_2^2 \sin^2 \alpha} \right) - R_2 \left(\ln \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) \right) + \\
& \left. + \frac{1}{2\sqrt{E(\alpha)}} (a \cos 2\alpha - b(2\alpha \sin 2\alpha + \cos 2\alpha)) \right] \}.
\end{aligned}$$

Se verifică ușor condiția

$$T \cos \alpha - N \sin \alpha + X^I + X^{II} = 0 \quad (22)$$

care exprimă condiția de echilibru a tuturor forțelor rezultante în vecinătatea zonei III, în proiecție pe axa Ox .

3. CONDIȚIILE CINEMATICE ȘI LA LIMITĂ PENTRU DETERMINAREA CONSTANTELOR A, B, A

Vom utiliza următoarele condiții:

- componenta v_θ a vitezei este nulă pe suprafața matriței;
- suprafața de discontinuitate S_1 trece prin punctele P_1, P_1' (similar S_2 trece prin punctele P_2, P_2');
- condiția de frecare pe suprafața matriței este dată de

$$t_{r\theta} |_{\theta=\pm\alpha} = m \sqrt{|H_t|} |_{\theta=\pm\alpha} \quad (23)$$

- contraforța de tragere este dată. De exemplu $X^I = 0$.

Urmând aceeași cale ca în lucrarea [1] obținem

$$a = \frac{\gamma - \tan \alpha}{\alpha \left[\tan 2\alpha + \gamma \left(\frac{\tan 2\alpha}{2\alpha} - 1 \right) \right]}, \quad b = - \frac{\frac{\gamma}{\cos 2\alpha}}{\alpha \left[\tan 2\alpha + \gamma \left(\frac{\tan 2\alpha}{2\alpha} - 1 \right) \right]} \quad (24)$$

unde $\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \frac{\delta y}{\delta x}$.

Pentru constanta A , obținem relația

$$\begin{aligned}
A = & \left\{ \frac{\gamma^2 \sin 2\alpha}{2m} \left(1 - \sqrt{\frac{E_1(\alpha)}{E(\alpha)}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{E(\alpha)}} \left\{ a \cos 2\alpha [(\gamma - 2\alpha) \tan 2\alpha - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\alpha\gamma \right] + b \left(2\alpha\gamma - 2\sin^2 2\alpha - \frac{\gamma \sin 4\alpha}{2} \right) \right\} \cdot \frac{1}{2\alpha \cos 2\alpha (\tan 2\alpha + \gamma) - \gamma \sin 2\alpha},
\end{aligned} \quad (25)$$

unde $E_1(\alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha$.

Tensiunea relativă de tragere are expresia

$$\frac{\frac{\sigma_{x2}}{2}}{\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}} = \frac{\sigma_{x1}}{\sqrt{3}\sigma_y} + \frac{1}{Bg} \left[\left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) F(\alpha, m) + Bg \cdot A \ln \frac{R_1^2}{R_2^2} \right], \quad (26)$$

unde

$$F(\alpha, m) = \frac{\sin^2 \alpha \left(\tan 2\alpha + \frac{\gamma}{\cos 2\alpha} \right)}{\alpha \left[\tan 2\alpha + \gamma \left(\frac{\tan 2\alpha}{2\alpha} - 1 \right) \right]}. \quad (27)$$

4. REZULTATE NUMERICE

S-a determinat tensiunea relativă de tragere pentru mai multe combinații ale parametrilor procesului de tragere. S-au considerat două reduceri în arie ($r\%=10\%$ și $r\%=20\%$), pentru parametrul mic Bingham au fost considerate două valori ($Bg=0.1$ și $Bg=0.3$), iar pentru factorul de frecare m a fost considerată valoarea $m = 0.0499$, rezultatele obținute fiind reprezentate în figurile 2 și 3.

S-au determinat, de asemenea, valorile funcțiilor $E(\alpha)$ și $E_1(\theta)$, valori reprezentate în figura 4.

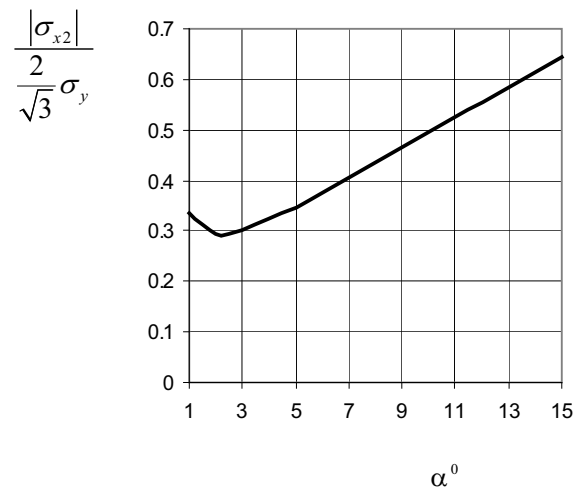


Fig. 2 Tensiunea relativă de tragere în funcție de semiunghiul de tragere în cazul modelelor [1] și al celui din lucrarea de față pentru $r\%=10\%$: $Bg=0,1$; $m=0.0499$

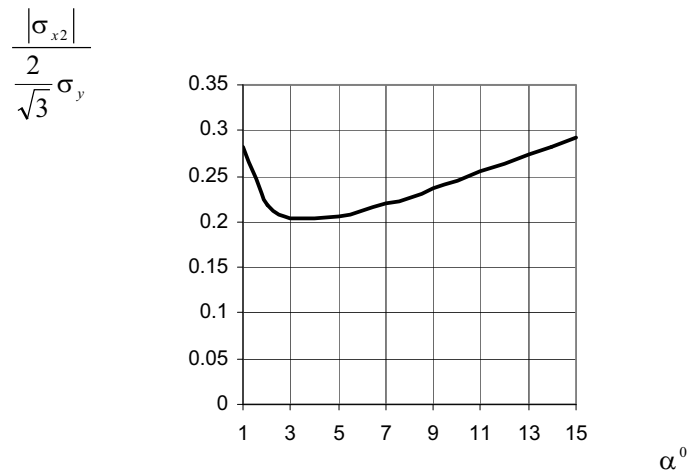


Fig. 3 Tensiunea relativă de tragere în funcție de semiunghiul de tragere în cazul modelelor [1] și al celui din lucrarea de față pentru $r\%=10\%$: $Bg=0,3$; $m=0.0499$

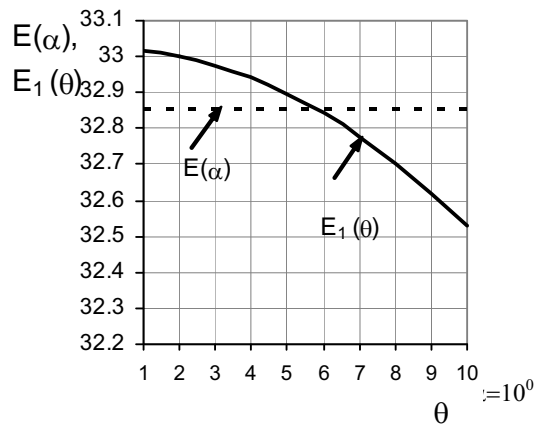


Fig. 4 Evoluția funcțiilor

5. CONCLUZII

Se observă tensiunile relative de tragere, practic, coincid în cazul soluției din lucrarea de față și în cel al soluției [1]. Rezultatele numerice conduc la concluzia că tensiunile relative de tragere sunt în toate cazurile în bună concordanță cu datele experimentale.

Se observă, de asemenea, că expresia $E(\alpha)$ nu depinde de viteza de tragere, de reducerea în arie, dar depinde de semiunghiul matriței. În domeniul $\theta \in (-\alpha, \alpha)$,

pentru semiunghiul matriței α dat, evident $E(\alpha)$ este constant, iar $E_1(\theta)$ descrește odată cu creșterea unghiului θ , funcțiile nu depind de reducerea în arie, viteza de tragere, dar depind de semiunghiul matriței (fig. 4) și de condițiile de frecare.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Cristescu, I. Suliciu, *Viscoplasticitate*, Ed. Tehnică, București, 1976.
2. G. Camenschi, N. Sandru, *Viscoplastic Flow through Inclined Planes with Application to the Strip Drawing*, Lett. Appl. Engng. Sci., 17 (1979).
3. G. Camenschi, N. Cristescu, N. Sandru, *High Speed Wire Drawing*, Arch. Mech., 31, 5 (1979).
4. G. Camenschi, N. Sandru, *Inertia influence in Strip Drawing Problem*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. Appl., v.25, 2, 1980, 207-216.
5. N. Sandru, G. Camenschi, *A mathematical model of strip drawing*, Preprints CNMS XXVI, Brăila, România 14-15 June, 2002.
6. S. Cleja-Tigoiu, N. Cristescu *Plasticity Theory with Applications in Metal Forming*, University Press Bucharest, 1985.

Abstract. In this paper is approached the problem of strip drawing through a converging die using a local method, the method of perturbation series with respect to a small parameter-Bingham's number, as it was used in several papers [2-5]. Here the solution of the problem is less complicated using a theorem of mean value and the results obtained are practically identical with the results given in [1]