

GRAMATICI CONTEXTUALE R-FUZZY

AURORA BACIU

Universitatea Spiru Haret, Facultatea de Matematică-Informatică

ANCA PASCU

Rezumat: În această comunicare se prezintă o nouă fuzzificare a gramaticilor contextuale introduse de Solomon Marcus. Se iau ca structuri algebrice ale mulțimii valorilor de adevăr structurile definite de W. Wechler.

Se introduce noțiunea de algebră R-fuzzy totală și se arată că ierarhia obținută cu aceste algebre extinde capacitatea generativă a gramaticilor contextuale.

Cuvinte cheie: gramatici contextuale fuzzy, limbaj contextual fuzzy, algebră fuzzy, semiinel partial ordonat

W. Wechler în [4] introduce noțiunile de algebră fuzzy și algebră R-fuzzy, de la care Gh. Păun în [3] definește noțiunile de gramatică contextuală simplă, generalizată și cu algebre care generează familii de limbaje contextuale.

O mulțime fuzzy este o aplicație $A: X \rightarrow Y$, unde X - mulțime finită nevidă, iar Y este mulțimea valorilor de adevăr.

Un limbaj fuzzy este o submulțime fuzzy a lui X^* monoidul liber generat de mulțimea X .

O gramatică, ca mecanism generativ al unui limbaj, poate fi fuzzy-ficată ținând seama de faptul că elementele gramaticii sunt mulțimi fuzzy peste Y și că s-au definit mai multe structuri algebrice ale mulțimii, valorilor de adevăr (mulțimile R-fuzzy și mulțimilor L-fuzzy [4]).

În această lucrare se definesc gramaticile contextuale fuzzy luându-se ca mulțimi ale valorilor de adevăr algebrele R-fuzzy. Se introduce noțiunea de algebră R-fuzzy totală. Se studiază ierarhia claselor de limbaje fuzzy ce se obțin cu ajutorul acestor structuri. Ierarhia obținută este mai generală decât cea din [1].

Definiția 1.[4] *O structură algebrică $(R, \cap, +, \cdot, \rightarrow)$ cu patru operații binare, numite intersecție, sumă, produs și reziduare se numește algebră fuzzy dacă se îndeplinesc următoarele axiome:*

- (1) (A, \cap) este o semilattice;
- (2) $(A, +, \cdot)$ este un semiinel parțial ordonat;
- (3) $a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$;

- (4) $a \leq a'$ implică $a' \rightarrow b \leq a \rightarrow b$;
 (5) $b \leq b'$ implică $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b'$.

Definiția 2.[4] O algebră fuzzy se numește algebră R-fuzzy dacă
 $\{r \in R \mid r = r' \rightarrow r'', r', r'' \in R\} = \{0, 1\}$.

Definiția 3.[3] O gramatică contextuală simplă este un 3-uplu $G = (V, B, C)$ unde V este un alfabet finit, nevid, $B \subset V^*$ este o mulțime numită baza gramaticii și $C \subset V^* \times V^*$ este mulțimea finită a contextelor.

Limbajul generat de G este

$$L(G) = B \cup \{u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \mid n \geq 1, x \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C, i = \overline{1, n}\}.$$

Familia limbajelor contextuale simple se notează cu **S** .

Definiția 4.[3] O gramatică contextuală generalizată este 4-uplu $G = (V, B, B', C)$ unde V, B, C au aceeași semnificație ca în definiția anterioară iar $B' \subset V^*$ este o mulțime finită.

Limbajul $L(G)$ generat de G este

$$L(G) = B \cup \{u_n \dots u_1 x y^n v_1 \dots v_n \mid n \geq 1, x \in B, y \in B', \langle u_i, v_i \rangle \in C, i = \overline{1, n}\}.$$

Familia limbajelor contextuale generalizate este notată cu **G** .

Definiția 5.[3] O gramatică contextuală cu alegere este 4-uplul $G = (V, B, C, \varphi)$ unde V, B, C au aceeași semnificație, iar $\varphi: V^* \rightarrow \mathbf{S}(C)$.

Limbajul $L(G)$ generat de G este

$$L(G) = B \cup \left\{ u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \mid n \geq 1, x \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C, i = \overline{1, n}, \right. \\ \left. \langle u_1 v_1 \rangle \in \varphi(x), \langle u_i v_i \rangle \in \varphi(u_{i-1} \dots u_1 x v_1 \dots v_{n-1}), i = \overline{2, n} \right\}$$

Familia limbajelor contextuale cu alegere este notată cu **C** .

Vom defini gramaticile contextuale fuzzy luând ca mulțimi ale valorilor de adevăr algebrele R-fuzzy.

Definiția 6. Fie R o algebră R-fuzzy. O gramatică contextuală simplă R-fuzzy este 3-uplul $G = (V, B, C)$ unde V are aceeași semnificație ca în definiția 3, B este o mulțime R-fuzzy în V^* și C este o mulțime R-fuzzy în $V^* \times V^*$.

Limbajul $L(G)$ generat de G este

$$L(G) = \left\{ y \mid y \in V^* \text{ există } x \in B, x \sim^* y \right\}$$

sau $L : V^* \rightarrow R$ este

$$L(Z) = \sum_{z=u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n} B(x) C(\langle u_1, v_1 \rangle) \dots C(\langle u_n, v_n \rangle).$$

Cele două expresii sunt echivalente căci dacă $x \in B$ cu relația " \sim " care este o relație binară definită pe V^* prin

$$y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow \text{există } \langle u, v \rangle \in \mathbf{C} \text{ astfel ca } y_2 = u y_1 v$$

iar \sim^* este închiderea reflexivă și tranzitivă a relației " \sim ", avem

$$x \sim u_1 x v_1 \sim \dots \sim u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n$$

și

$$L(z) = \sum_{z=u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n} B(x) C(\langle u_1, v_1 \rangle) \dots C(\langle u_n, v_n \rangle)$$

În consecință este evident că dacă $z \in V^*$ și $L(z)$ este suma de mai sus atunci $x \sim^* z$.

Familia limbajelor contextuale simple R-fuzzy se va numi \mathbf{S}_R .

Definiția 7. Fie R o algebră R-fuzzy. O gramatică contextuală generalizată R-fuzzy este 4-uplul $G = (V, B, B', C)$ unde B, B' sunt mulțimi R-fuzzy în V^* , iar C este o mulțime R-fuzzy în $V^* \times V^*$.

Limbajul $L(G)$, generat de G , este $L : V^* \rightarrow R$,

$$L(z) = \sum_{z=u_n \dots u_1 x y^n v_1 \dots v_n} B(x) [B'(y)]^n C(\langle u_1, v_1 \rangle) \dots C(\langle u_n, v_n \rangle)$$

Familia limbajelor contextuale generalizate R-fuzzy se va nota \mathbf{G}_R .

Definiția 8. Fie R o algebră R-fuzzy. O gramatică contextuală cu alegere R-fuzzy este 4-uplul $G = (V, B, C, \varphi)$ unde B și C sunt R-fuzzy în V^* , respectiv $V^* \times V^*$.

Limbajul $L(G)$ generat de G este $L : V^* \rightarrow R$ definit de

$$L(z) = \sum_{z=u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n} B(x) C(\langle u_1, v_1 \rangle) \dots C(\langle u_n, v_n \rangle)$$

unde $\langle u_1, v_1 \rangle \in \varphi(x), \dots, \langle u_n, v_n \rangle \in \varphi(\langle u_{n-1}, v_{n-1} \rangle)$.

Familia limbajelor contextuale cu alegere R-fuzzy o vom nota \mathbf{C}_R .

Definiția 9. Fie G o gramatică contextuală simplă (generalizată, cu alegere) și $c \in R$. Se numește limbaj contextual simplu (generalizat, cu alegere) generat de G cu pragul c dacă

$$L(G, c) = \{y \in V \mid L(y) \geq c\}.$$

Famiiliile limbajelor contextuale simple, generalizate și cu algebre R-fuzzy vor fi notate cu \mathbf{S}_R , \mathbf{G}_R și \mathbf{C}_R .

Definiția 10. O algebră R-fuzzy se numește totală dacă pentru orice r_1, r_2, \dots, r_n, c cu $r_1 + r_2 + \dots + r_n \geq c$, rezultă că cel puțin un $r_i \geq c$.

Conceptele de semiinel semiparțial [1] și algebră R-fuzzy totală sunt diferite.

Teorema 1. Dacă R este o algebră totală R-fuzzy cu 1 ca ultim element, atunci $\mathbf{S} = \mathbf{S}_R$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}_R$ și $\mathbf{C} = \mathbf{C}_R$.

Demonstrație. Incluziunile $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_R$, $\mathbf{G} \subset \mathbf{G}_R$ și $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}_R$ sunt evidente, urmează să demonstrăm incluziunile inverse.

Vom demonstra incluziunea $\mathbf{S}_R \subset \mathbf{S}$, celelalte demonstrându-se similar.

Fie $L \in \mathbf{S}_R$. Rezultă că există G și $c \in R$ astfel încât $L = L(G, c)$. Fie $z \in L$ astfel încât

$$L(z) = \sum_{z=u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n} B(x) C(\langle u_1, v_1 \rangle) \dots C(\langle u_n, v_n \rangle) > c.$$

Să presupunem că $L(z) = r_1 + \dots + r_m$, rezultă că dacă există $r_i \geq c$, atunci există x^i , $\langle u_1^i, v_1^i \rangle, \dots, \langle u_n^i, v_n^i \rangle$ și $z = u_n^i \dots u_1^i x^i v_1^i \dots v_n^i$ ceea ce înseamnă că $B(x^i) \geq c$ și $C(\langle u_1^i, v_1^i \rangle) \geq c$, $C(\langle u_2^i, v_2^i \rangle) \geq c \dots$, $C(\langle u_n^i, v_n^i \rangle) \geq c$ pentru că $r_i \geq c$ și în fiecare semiinel cu 1 ca ultim element $r_1 < c$ implică $r_1 \dots r_n < c$ pentru fiecare r_1, r_2, \dots, r_n, c .

Prin definiție $G' = (V, B', C')$ unde $B' = \{x \in B \mid B(x) \geq c\}$ și $C' = \{\langle u_i, v_i \rangle \in C \mid C(\langle u_i, v_i \rangle) \geq c\}$.

Este ușor de observat că dacă $L = L(G')$ atunci $L \in \mathbf{S}$ și deci $\mathbf{S}_R \subset \mathbf{S}$.

Teorema 2. Fie R o algebră R -fuzzy cu două elemente r_1 și r_2 și $c < 1$ astfel ca $r_1 < c$, $r_2 < c$, $r_1 + r_2 \geq c$ și $r_1^n + r_2^n \geq c$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\mathbf{S} \subsetneq \mathbf{S}_R$, $\mathbf{C} \subsetneq \mathbf{C}_R$.

Demonstrație. Pentru incluziunea strictă $\mathbf{S} \subsetneq \mathbf{S}_R$ să considerăm o gramatică contextuală simplă R -fuzzy $G = (\{a, b, c\}, B, C)$ unde $B : V^* \rightarrow R$ este definită de

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = \varepsilon \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

și $C : V^* \times V^* \rightarrow R$

$$C(\langle u, v \rangle) = \begin{cases} r_1 & \text{dacă } \langle u, v \rangle = \langle a, b \rangle \\ r_1 & \text{dacă } \langle u, v \rangle = \langle \varepsilon, c \rangle \\ r_2 & \text{dacă } \langle u, v \rangle = \langle b, c \rangle \\ r_2 & \text{dacă } \langle u, v \rangle = \langle a, \varepsilon \rangle \end{cases}.$$

Gramatica G generează cuvinte de forma

$$z_1 = a^{n_1} a^{n_2} \dots a^{n_k} b^{m_1} c^{m_1} b^{n_2} c^{m_2} \dots b^{n_k} c^{m_k}$$

cu $n_i, m_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$ și $L(z_1) = r_1^n$,

$$z_2 = b^{n_1} b^{n_2} \dots b^{n_k} c^{m_k} a^{m_k} \dots c^{n_1} a^{m_1}$$

cu $n_i, m_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$ și $L(z_2) = r_2^m$ și

$$z_3 = a^{q_k} \dots a^{q_1} b^{m_1} a^{n_1} b^{n_1} c^{p_1} c^{m_1} \dots c^{m_k}$$

cu $n_i, m_i, p_i, q_i \geq 0$ și

$$L(z_3) = r_1^{n_1} r_1^{p_1} r_2^{m_1} r_2^{q_1} \dots r_1^{n_k} r_1^{p_k} r_2^{m_k} r_2^{q_k}.$$

Dar $r_1 < c < 1$ ceea ce implică $r_1^n < c$ și $L(z_1) < c$. Analog rezultă $L(z_2) < c$ și $L(z_3) < c$.

Gramatica G generează cuvinte de forma $z = a^n b^n c^n$ cu $L(z) = r_1^n + r_2^n \geq c$.

În consecință, $L(G, c) = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ este în \mathbf{S}_R dar nu este în \mathbf{S} [3].

Ca să demonstrăm că $\mathbf{C} \subsetneq \mathbf{C}_R$ să considerăm limbajul $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ care nu este în \mathbf{C} [3].

Fie o gramatică contextuală cu alegere R-fuzzy $G = (\{a, b, c\}, B, C, \varphi)$ unde B și C sunt cele definite mai sus și $\varphi : V^* \rightarrow \mathcal{P}(C)$ definită prin

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\} \\ \varphi(a^n b^n) &= \{\langle a, b \rangle, \langle \varepsilon, c \rangle\}, n \geq 1 \\ \varphi(a^n b^m c^m) &= \{\langle \varepsilon, c \rangle\}, n \geq 1 \text{ și } 1 \leq m < n \\ \varphi(b^n c^n) &= \{\langle b, c \rangle, \langle a, \varepsilon \rangle\}, n \geq 1 \\ \varphi(a^m b^n c^n) &= \{\langle a, \varepsilon \rangle\}, n \geq 1 \text{ și } 1 \leq m < n \\ \varphi(x) &= \emptyset \text{ în rest} \end{aligned}$$

care generează L .

Cuvintele $z_1 = a^n b^n c^m$ cu $m \leq n$ au $L(z_1) = r_1^{n+m} < c$, $z_2 = a^m b^n c^n$ cu $m \leq n$ au $L(z_2) = r_2^{m+n} < c$ și $z = a^n b^n c^n$ au $L(z) = r_1^n + r_2^n \geq c$.

Ca exemple de algebră R-fuzzy care îndeplinește condițiile acestei teoreme $Q = (Q_+, +, \min)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $c = 4$; $R = (R, +, \cdot)$, $R = \{0, r_1, r_2, 1\}$ unde 0 este prim element, iar 1 ultim element, "+" și " \cdot " sunt definite de tablel

"+"	0	1	r_1	r_2
0	0	1	r_1	r_2
1	1	1	1	1
r_1	r_1	1	r_1	1
r_2	r_2	1	1	r_2

" \cdot "	0	1	r_1	r_2
0	0	0	0	0
1	0	1	r_1	r_2
r_1	0	1	1	0
r_2	0	r_2	0	r_2

$c = 1$, $r_1 < 1$, $r_2 < 1$ și $r_1 + r_2 = 1$.

Teorema 3. Fie R o algebră R-fuzzy cu proprietatea că există c, r , $r \geq c$ și $r^n < c$ pentru fiecare $n \geq 2$, atunci $\mathbf{G} \subsetneq \mathbf{G}_R$.

Demonstrație. Să considerăm limbajul $L = \{ab^n a \mid n \geq 0\} \cup \{ab^n \mid n \geq 0\}$ care nu este în \mathbf{G} [3]. Acest limbaj este generat de o gramatică contextuală generalizată R-fuzzy $G = (\{a, b\}, B, B', C)$ unde

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = \varepsilon \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}, \quad B'(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = b \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

$$C(\langle u, v \rangle) = \begin{cases} r & \text{dacă } \langle u, v \rangle \in \{\langle a, a \rangle, \langle a, \varepsilon \rangle\} \\ 1 & \text{dacă } \langle u, v \rangle = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}.$$

Fiecare cuvânt $z_1 = ab^n a$ este generat cu $L(z_1) = r$, $z_2 = ab^n$ cu $L(z_2) = r$. Celelalte cuvinte generate cu această gramatică sunt de forma $L(z) = r^n$, $n \geq 2$. Rezultă că dacă $L(G, c) = L$, atunci $L \in \mathbf{G}_R$.

Teoremele 2 și 3 dau o ierarhie a algebrelor R-fuzzy care largesc capacitatea generativă a familiilor de limbaje \mathbf{S} , \mathbf{G} , \mathbf{C} .

BIBLIOGRAFIE

1. Bucurescu, A. Pascu *Fuzzy Contextual Grammars*, Rev. Roum. Math. Pures et. Appl. (1986).
2. S. Marcus *Contextual Grammars*, Rev. Roum. Math. Pures et. Appl, 14 (1969).
3. Gh. Păun - Marcus *Contextual Grammars and Languages. A Survey*, Rev. Roum. Math. Pures et. Appl., 24 (1979).
4. W. Wechler *The Concept of Fuzziness in Automata and Languages Theory*, Academic-Verlag, Berlin (1978)

Abstract: In this paper is presented a new fuzzification of contextual grammars introduced by Solomon Marcus. One takes as algebraic structures of the set of truth values, the structures defined by W. Wechler.

The notion of total R-fuzzy algebra is introduced and it is shown that the hierarchy obtained within these algebras extends the generative capacity of contextual grammars.