PORTOFOLII OPTIME ÎN FINANŢE ŞI ACTUARIAT

MANUELA GHICA
Universitatea Spiru Haret

Rezumat: În acest articol sunt prezentate câteva rezultate privind portofoliile optime atât pentru o piaţa financiară cât şi pentru o piaţă de asigurări când funcţia de utilitate este o mixtură exponenţială.

Cuvinte cheie: portofoliu, rentabilitate, activ financiar, divident, portofoliu optim, echilibru competiţional.

1. INTRODUCERE

În acest articol vom prezenta câteva rezultate despre portofolii optime pentru o piaţă financiară şi pentru o piaţă de asigurări. Vom considera în cazul unei pieţe financiare n active financiare pe o perioadă de timp limitată a căror valori se cunosc. Vom arăta modele de selecţie pentru portofolii optime bazate pe măsuri simetrice. În cazul pieţei de asigurări considerăm un model standard de repartiţie a riscului cu n agenţi care pot negocia orice contract pe care se pot baza în formarea unui portofoliu. Vom discuta şi vom da o caracterizare a unui echilibru competiţional în ipoteza că un astfel de echilibru există. În încheiere este stabilită o teoremă care determină portofoliile optime şi preţul de piaţă când funcţia de utilitate este o mixtură exponenţială.

2. PORTOFOLII OPTIME PENTRU O PIAŢĂ FINANCIARĂ

În analiza selecţionării unor portofolii optime pe o piaţă financiară este necesar să introducem conceptul de rentabilitate. Relaţia care leagă conceptul de rentabilitate cu cel de risc este următoarea: o rentabilitate mare este însoţită de un risc mare şi invers.

Conceptul de rentabilitate aplicată unui activ financiar este definit de două componente ale câştigului: dividentul net pe care îl aduce acest activ şi creşterea valorii de piaţa în raport cu preţul de achiziţie. Rentabilitatea unui activ finaciar se defineşte în raport cu o perioadă de timp, în raport cu valoarea activului financiar la începutul şi la sfârşitul perioadei de timp considerate şi în raport cu valoarea dividentului produs de activul financiar de la sfârşitul perioadei de timp considerate.

Fie i, activul financiar pentru care dorim să calculăm rentabilitatea şi fie h, lungimea perioadei de timp. Notăm cu $\left[t-h,t\right]$ perioada de timp considerată şi cu $p_{t-h,i}$ (respectiv

$p_{t,i}$) valoarea activului financiar i de la începutul (respectiv la sfârşitul) perioadei de timp considerate. Dacă notăm cu $d_{t,i}$ valoarea dividentului produs de activul financiar la sfârşitul perioadei de timp considerate şi cu $r_{t,i}$ rentabilitatea activului financiar i pe intervalul de timp considerat mai sus atunci este indeplinită următoarea relaţie $r_{t,i} = \dfrac{p_{t,i} - p_{t-h,i} + d_{t,i}}{p_{t-h,i}}$.

În cazul în care perioada de timp considerată este $[t-kh, t]$, unde $k \geq 1$, atunci rentabilitatea activului financiar i este dată de următoarea relaţie:

$$r_{t,i}(k) = \frac{p_{t,i} - p_{t-kh,i} + d_{t,i}}{p_{t-kh,i}}.$$

Valorile obţinute pentru rentabilităţile $r_{t,i}, r_{t-h,i}, r_{t-2h,i}, \ldots, r_{t-kh,i}$ le putem considera componenetele unei variabile aleatoare ξ_i, variabilă care poate fi considerată rentabilitatea activului financiar i. Considerând n active financiare atunci vectorul $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ devine vectorul aleator al rentabilitaţii celor n active financiare, numit şi *piaţa financiară*. Definim următoarele caracteristici pentru vectorul pieţei financiare:

1. Dacă notăm cu $\mu_i = E[\xi_i]$, i = 1,…, n, atunci vectorul $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ va fi numit vectorul de medii.
2. Dacă notăm cu $c_{ij} = E((\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j))$ atunci $C = (c_{ij})$ este matricea de covarianţă a vectorului aleator $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Vom prezenta mai jos modele de selecţie a portofoliului bazate pe măsuri simetrice: dispersia şi abaterea medie absolută. Aici se încadrează modelele Markowitz [3], [4] sau modele de tip Konno Yamakazi [5]. Acest tip de modele folosesc faptul că riscul politicii de investiţie este definit ca dispersia profitului total.

Considerăm un individ care dispune de o sumă de bani pe care vrea să o investească în n active financiare care pot aparţine societăţilor cotate la bursă, sau pot reprezenta titluri de valoare la fonduri mutuale sau la societăţi de investiţii financiare etc. Fie x_j suma de bani care se investeşte în activul financiar j, j=1, 2,…, n. Se presupune un fapt nerealist că activele financiare sunt infinit divizibile, i.e., un investitor poate cumpăra dintr-un activ financiar orice parte exprimată printr-un număr real pozitiv. Este evident că în realitate cumpărarea unor fracţiuni de active financiare este nepermisă deoarece se poate cumpăra de la bursă doar număr întregi de acţiuni. Presupunem că suma de bani de care dispune investitorul este o constantă notată cu M şi că vectorul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care descrie o anumită politică de investiţie satisface restricţiile :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = M \\ x_i \geq 0, \text{i=1,2,...,n} \end{cases} \qquad (1)$$

Vectorul x care satisface aceste restricţii va fi numit *portofoliu*. Pentru un portofoliu definit astfel introducem noţiunea de profit corespunzător şi anume:

$$V(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j \tag{2}$$

În cazul în care valorile ξ_i sunt presupuse constante date atunci determinarea unui optim în politica de investiţii revine la o problemă clasică de programare liniară. Dar această soluţie nu este suficientă deoarece în practică ξ_i sunt variabile aleatoare şi atunci se impune estimarea vectorului mediilor $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ şi a matricei de covarianţă $C = (c_{i,j})$ prin metode de statistică matematică [7].

Vom introduce termenii de *medie a profitului pentru portofoliul x*:

$$E(V(x)) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \tag{3}$$

şi *dispersie a profitului pentru portofoliul x*:

$$D^2(V(x)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{4}$$

În prima lucrare de acest gen, profesorul H. Markowitz studiază riscul politicii de investiţie în raport cu termenii dispersiei profitului investiţiei.

Problema revine la a calcula un portofoliu care să aibă un risc minim şi în acelaşi timp profitul obţinut să fie cât mai mare, eventual cu restricţia: să fie mai mare decât un prag dat.

Această problemă a selecţiei portofoliului optim se formulează sub forma unei probleme de programare pătratică parametrică:

$$P_1(\alpha) \qquad \begin{cases} \min\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \right) \\ \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \geq \alpha M \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = M \\ 0 \leq x_j \leq u_j, \ \text{j=1,2,...,n} \end{cases}$$

Valoarea α se consideră a fi un prag minim pentru rentabilitatea cerută de investitor, iar problema de minimizare formulată anterior este condiţionată de acest prag. Problema $P_1(\alpha)$ este o problemă de optimizare patratică cu funcţia obiectiv definită de o formă pătratică semipozitiv definită şi cu restricţii liniare. Mulţimea soluţiilor admisibile pentru această problemă este nevidă dacă $\alpha M \leq \max_{1 \leq i \leq n}(\mu_i)$ şi în plus are chiar soluţie optimă dacă matricea de covarianţă este pozitiv definită.

Alt tip de experienţă cu care se poate întâlni un investitor este să dorească găsirea unui portofoliu care să aibă un profit mediu maxim pentru un risc mai mic decât un prag dat. Problema găsirii unui portofoliu optim se poate formula ca o problemă de programare parametrică cu funcţia obiectiv liniară şi restricţii pătratice:

$$P_2(\beta)\qquad \begin{cases} \max\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j\right) \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_i x_j \le \beta \\ \sum_{j=1}^{n}x_j = M \\ 0 \le x_j \le u_j,\ \text{j=1,2,...,n} \end{cases}$$

Vom considera în continuare funcţia obiectiv $f_\delta(x)$, unde $\delta \in [0,1]$ este un parametru a cărui mărime relativă descrie importanţa pe care o acordăm fiecăruia din cei doi termeni de mai jos.

$$f_\delta(x) = (1-\delta)x^T Cx - \delta\mu^T x \tag{5}$$

Problema de optimizare care descrie acest fenomen se va numi model de optimizare a compromisului risc-profit:

$$P_3(\delta)\qquad \begin{cases} \min \mathrm{f}_\delta(x) \\ \sum_{j=1}^{n}x_j = M \\ 0 \le x_j \le u_j,\ \text{j=1,2,...,n} \end{cases}$$

Valoarea parametrului δ este direct proporţională cu atitudinea investitorului în faţa riscului, de exemplu, dacă δ=0 ar însemna că investitorul doreşte să obţină un profit mai sigur, scutit de fluctuaţii, iar dacă, dimpotrivă, δ=1, ar demonstra lipsa de teamă a investitorului în faţa riscului şi dorinţa acestuia de maximizare a profitului mediu.

Problema $P_3(\delta)$ este o problemă de programare parametrică convexă deoarece matricea de covarianţă este pozitiv semidefinită şi soluţia, pentru un δ dat, are proprietatea că nu există o structură a investiţiilor care la aceeaşi dispersie să dea profit mediu mai mare şi nici la acelaşi profit mediu sa aibă o dispersie sau risc cu o valoare mai mică.

O diminuare a riscului se poate realiza printr-o diversificare a portofoliului, adică portofoliul să conţină mai multe active.

Componentele matricei de covarianţă $C = (c_{ij})$ a vectorului aleator $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, unde $c_{ij} = E\left((\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)\right)$ reprezintă covarianţele dintre rentabilităţile ξ_i şi ξ_j. Dacă aceste două rentabilităţi se mişcă în acelaşi sens atunci c_{ij} este pozitivă altfel va fi negativă. Din formula riscului de investiţie $D^2(V(x)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_i x_j$ observăm că riscul va scădea dacă în portofoliu se vor achiziţiona mai multe active finanaciare a căror rentabilitate se mişca în sens contrar astfel încât covarianţele corespunzătoare să fie negative. Aşadar preţul plătit pentru reducerea riscului investiţiei este scăderea profitului.

Presupunem că $x_i \geq 0$, i=1,2,...,n sunt considerate ca rapoarte între suma investită în active şi suma totală de care dispune investitorul, avem deci $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. În acest caz expresia riscului de investiţie este:

$$D^2\left(V\left(x\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{c_{ii}}\sqrt{c_{jj}}x_i x_j =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{c_{ii}}x_i\right)^2 \leq \left(\max_{1\leq i\leq n}\sqrt{c_{ii}}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 = \max_{1\leq i\leq n} c_{ii} = \max_{1\leq i\leq n}\left(D^2\left(\xi_i\right)\right) \quad (6)$$

Este evident din relaţiile de mai sus că riscul portofoliului este mai mic decât cel mai mare dintre riscurile activelor financiare care îl compun.

Aşa cum am prezentat mai sus se observă că Markowitz a definit riscul unui portofoliu cu ajutorul dispersiei profitului corespunzător acestuia, în schimb alţi statisticieni cum ar fi Konno şi Yamazaki au propus abaterea medie absolută ca o măsura a riscului sau prin a semideviaţiei medii a profitului.

3. PORTOFOLII OPTIME PENTRU PIAŢA DE ASIGURĂRI

Fie o mulţime de n agenţi şi o relaţie de preferinţă $\geq_i$ definită pe o mulţime de variabile aleatoare. Aceste preferinţe sunt reprezentate prin funcţia de utilitate medie von Neumann-Morgenstern, i.e., există o mulţime de funcţii continue $u_i : R \to R$ astfel încât: $X \geq_i Y \Leftrightarrow Eu_i\left(X\right) \geq Eu_i\left(Y\right)$. Presupunem ca preferinţele sunt monotone şi că există aversiune faţă de risc, deci, avem $u_i^{'}\left(\omega\right) > 0$ si $u_i^{''}\left(\omega\right) \leq 0$, pentru orice ω aparţinând unui domeniu relevant. O variabilă aleatoare X_i numită portofoliu iniţial este atribuită fiecărui agent i, i.e., există un spaţiu de probabilitate $\left(\Omega, K, P\right)$ astfel încât fiecărui agent i îi este atribuită valoarea $X_i\left(\omega\right)$ pentru $\omega \in \Omega$. Este necesar să presupunem că atât valoarea medie cât şi dispersia există pentru aceste portofolii iniţiale, ceea ce poate fi scris ca $X_i \in L^2\left(\Omega, K, P\right)$ sau pe scurt vom scrie $X_i \in L^2$.

Dacă presupunem că agenţii pot negocia orice contract care li se acordă atunci vom avea o nouă mulţime de variabile aleatoare Y_i, $i \in I$ reprezentând posibile plăţi finale pentru diferiţi membri din grup, sau valoarea portofoliului final. Aceste tranzacţii determină preţul de piaţă, valoare exprimată prin π(Z) $(\forall)Z \in L^2$.

Se observă că funcţia π definită pe L^2 este liniară, i.e., pentru orice două constante $a, b \in R^2$ să fie adevărată relaţia: $\pi\left(aY + bZ\right) = a\pi\left(Y\right) + b\pi\left(Z\right)$. În acest caz este suficient să considerăm că $\pi\left(\text{Y+Z}\right) > \pi\left(Y\right) + \pi\left(Z\right)$ pentru orice variabile aleatoare $Y, Z \in L^2$. Putem presupune proprietatea de infinit divizibilitate pentru orice portofoliu, adică un agent de asigurări poate face o poliţă de asigurări pentru variabila Y+Z si apoi să facă reasigurări separat pentru Y, respectiv pentru Z. În final presupunem pentru funcţionala π condiţia de pozitivitate, şi anume $\pi\left(Z\right) \geq 0, \left(\forall\right) Z \geq 0$ P-a.s.

Dacă o funcţională liniară, continuă şi pozitivă pe un spaţiu L^p, $1 \leq \text{p} \leq \infty$ este mărginită, atunci folosind teorema de reprezentare a lui Riesz putem concluziona că există o unică variabilă aleatoare $\xi \in L^2$ astfel încât:

$$\pi\left(Z\right) = E\left(Z\xi\right), \quad \left(\forall\right) Z \in L^2$$

Definiţia 1. Dacă $\sum_{i=1}^{n} Z_i \leq \sum_{i=1}^{n} X_i =: X_M$ atunci vectorul $Z = \left(Z_1,\ \text{Z}_2,\ ...,\ \text{Z}_\text{n}\right)$ se numeşte *vector posibil*.

O situaţie care apare pentru fiecare agent i este găsirea unui optim pentru următoarea relaţie:

$\sup_{Z_i \in L^2} Eu_i\left(Z_i\right)$ astfel incât

$$\pi\left(Z_i\right) \leq \pi\left(\text{X}_\text{i}\right) \quad . \tag{7}$$

Este necesar să se demonstreze existenţa (şi unicitatea) soluţiilor relaţiei (7). Dacă mulţimea $\left\{Z_i \in L^2 : \ \text{Eu}_\text{i}\left(Z_i\right) < \infty, \pi\left(Z_i\right) \leq \pi\left(X_i\right)\right\}$ este mărginită (în norma L^2) atunci existenţa este garantată. De asemenea, proprietatea de strict concavitate pentru funcţia de utilitate u_i este suficientă pentru unicitate [7].

Definiţia 2. Un *echilibru competiţional* este o pereche (π,Y) unde π este preţul de piaţă şi Y=$\left(Y_1,\ \text{Y}_2,\ ...,\ \text{Y}_\text{n}\right)$ este un vector posibil astfel încât pentru fiecare i, Y_i verifică relaţia (7) şi proprietatea $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Pentru π dat atunci vectorul Y=$\left(Y_1,\ \text{Y}_2,\ ...,\ \text{Y}_\text{n}\right)$ se numeşte *vector echilibrat* dacă (π,Y) este un echilibru competiţional. În acest caz un Y_i se numeşte *portofoliu optim* pentru agentul i, $\text{i} \in \text{I}$.

În continuare vom caracteriza un echilibru competiţional presupunând că el există. Vom presupune că X_i nu este identic zero, şi că un echilibru unic există[2]. De asemenea, vom presupune că π(X_i)>0 pentru fiecare i. În acest caz vom prezenta următoarea teoremă:

Teorema 1. [1] Dacă relaţia de preferinţa atribuită agenţilor este astfel ca $u_i^{'}\left(\omega\right) > 0$ si $u_i^{''}\left(\omega\right) \leq 0$ pentru $\text{i} \in \text{I}$, şi există un echilibru competiţional (π,Y), unde

$\pi(Y_i)>0$ pentru fiecare i. Atunci echilibrul este caracterizat de existenţa unor constante pozitive α_i, $i \in I$, astfel încât pentru vectorul echilibrat $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ avem $u_i'(Y_i) = \alpha_i \xi$, a.s. pentru $(\forall) i \in I$ (8)

unde α_i este utilitatea marginală de preţ şi ξ este reprezentarea Riesz a funcţionalei de preţ π.

În teorema următoare vom da formula pentru preţurile de piaţa şi relaţia între portofoliile optime Y_i şi $\sum_{i=1}^{n} X_i =: X_M$ în cazul în care utilităţile marginale sunt sub forma unor mixturi exponenţiale.

Teorema 2. Fie utilităţile marginale mixturi exponenţiale de forma $u_i'(z) = \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{a_i}} + \frac{1}{2}e^{-2\frac{z}{a_i}}$, atunci portofoliul optim Y_i este afin în X_M şi preţul de piaţă

$$\pi(Z) = \frac{1}{2}h(a_1, ..., a_n, X_1, ..., X_n)\left(E\left[Ze^{-\frac{X_M}{A}} \right] + E\left[Ze^{-2\frac{X_M}{A}} \right] \right)$$

unde

$$h(a_1, ..., a_n, X_1, ..., X_n) = \left(-\frac{1}{2}E\left[Ze^{-\frac{X_M}{A}} \right] + \sqrt{\frac{1}{4}E^2\left[e^{-\frac{X_M}{A}} \right] + 2E\left[e^{-2\frac{X_M}{A}} \right]} \right)\left(E\left[e^{-2\frac{X_M}{A}} \right] \right)^{-1}$$

Demonstraţie: Deoarece pentru fiecare $i \in I$ utilităţile marginale sunt $u_i'(z) = \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{a_i}} + \frac{1}{2}e^{-2\frac{z}{a_i}}$ folosind caracterizarea (8) obţinem $\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{a_i}} + \frac{1}{2}e^{-2\frac{z}{a_i}} = \alpha_i \xi$, a.s., $i \in I$.

De asemenea obţinem $\lambda_i e^{-\frac{Y_i}{a_i}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\xi}$ unde $\lambda_i = \frac{1}{\alpha_i}$. După ce logaritmăm şi sumăm după i această ultimă relaţie, obţinem:

$$\xi = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{K-X_M}{A}} + e^{2\frac{K-X_M}{A}} \right), \text{ a.s., unde } K := \sum_{i=1}^{n} a_i \ln \lambda_i, \ A := \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

În plus, obţinem că portofolile optime pot fi scrise $Y_i = \frac{a_i}{A} X_M + b_i$, unde

$$b_i = a_i \ln \lambda_i - a_i \frac{K}{A}, \ i \in I .$$

Pentru determinarea vectorului $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ impunem restricţii de buget:

$$E\left[Y_i \left(\frac{1}{2}e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2}e^{2\frac{K-X_M}{A}} \right) \right] = E\left[X_i \left(\frac{1}{2}e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2}e^{2\frac{K-X_M}{A}} \right) \right], \ i \in I,$$

din care obţinem $b_i = m_i \cdot n_i^{-1}$ unde

$$m_i = E\left[X_i\left(\frac{1}{2}e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2}e^{2\frac{K-X_M}{A}}\right) - \frac{a_i}{A}X_M\left(\frac{1}{2}e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2}e^{2\frac{K-X_M}{A}}\right)\right] \text{ şi}$$

$$n_i = E\left(\frac{1}{2}e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2}e^{2\frac{K-X_M}{A}}\right), \ \mathrm{i} \in \mathrm{I}.$$

Dacă impunem normalizarea $E\{\xi\} = 1$ obţinem

$$e^{\frac{K}{A}} = \left(-\frac{1}{2}E\left[e^{-\frac{X_M}{A}}\right] + \sqrt{\frac{1}{4}E^2\left[e^{-\frac{X_M}{A}}\right] + 2E\left[e^{-2\frac{X_M}{A}}\right]}\right)\left(E\left[e^{-2\frac{X_M}{A}}\right]\right)^{-1} \qquad (9)$$

În acest caz λ_i sunt date de

$$\lambda_i = e^{\frac{b_i}{a_i}}\left(-\frac{1}{2}E\left[e^{-\frac{X_M}{A}}\right] + \sqrt{\frac{1}{4}E^2\left[e^{-\frac{X_M}{A}}\right] + 2E\left[e^{-2\frac{X_M}{A}}\right]}\right)\left(E\left[e^{-2\frac{X_M}{A}}\right]\right)^{-1}, \ \mathrm{i} \in \mathrm{I}.$$

Astfel preţul de piaţa este dat de următoarea formulă:

$$\pi(Z) = E[Z\xi] = E\left[\frac{1}{2}Z\left(e^{\frac{K-X_M}{A}} + e^{2\frac{K-X_M}{A}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{K}{A}}E\left[Ze^{-\frac{X_M}{A}}\right] + e^{2\frac{K}{A}}E\left[Ze^{-2\frac{X_M}{A}}\right]\right)$$

$(\forall)Z \in L^2$ unde valoarea constantei $e^{\frac{K}{A}}$ este dată de relaţia (9).

BIBLIOGRAFIE

1. Aase,K.K., *Perspectives of risk sharing*, Scandinavian Actuarial J.(2002).
2. Dana, R.A., *Existance, uniqueness and determinancy of equilibrium in C.A.P.M. with a riskless asset*, Journal of mathematical Economics 32. (1999)
3. Markowitz, H.M., *Portofolio selection*, J. of Finanace 8 (1952).
4. Markowitz, H.M., *Portofolio Selection: Efficient Diversification of Investements*, John Wiley and Sons, (1959).
5. Konno, H., Yamakazi, H., *Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo Stock Market*, Management Science, 37, (1991).
6. Nielson, L.T., *Uniqueness of equilibrium in the classical capital asset pricing model*, Journal og financial and Quantitative Analysis, 23, (1988).
7. Preda V, Craiu V., *Inferenţă statistică pentru medii condiţionate*, Ed. Universităţii Bucureşti (1985).

Abstract: This paper starts with a paragraph which presents a classical portfolio selection model and the problems which must be solved by an investitor when he wants to make an investment decision. In the following we present some results for a standard risk sharing model of reinsurance markets. In the end we consider the case of marginal mixture exponential utility functions.