# DETERMINAREA COEFICIENŢILOR OMOGENIZAŢI PENTRU O ECUAŢIE DE TIP ELIPTIC

**ANTONELA GONCIULEA**
*Universitatea Spiru Haret*

**Rezumat:** Cercetările teoretice de până în prezent au dus la elaborarea mai multor metode de omogenizare privind comportarea unor materiale eterogene obţinute ca amestecuri de materiale cu proprietăţi bine definite. În cazul ecuaţiilor de tip eliptic se încearcă obţinerea unei dezvoltări asimptotice a soluţiei, ce permite calculul coeficienţilor omogenizaţi.

**Cuvinte cheie:** omogenizare, coeficienţi omogenizaţi, ecuaţie macroscopică.

## 1. INTRODUCERE

Metoda omogenizării este o metodă matematică de studiu a mediilor cu structură periodică. Se studiază convergenţa operatorilor diferenţiali în cazul în care coeficienţii au o limită slabă în $L^2(\Omega)$ şi faptul că limita soluţiei verifică o altă ecuaţie în care coeficienţii nu sunt limita coeficienţilor iniţiali.

Apare astfel ideea de a considera ecuaţii cu coeficienţi variabili, care au o limită slabă într-o topologie adecvată şi de a cerceta dacă şi solutiile corespunzatoare au limită, iar dacă ea există, de a cauta ecuaţia verificată de aceasta.

Modelul matematic cel mai clar care ilustrează metoda omogenizării este un material compozit. El se obţine prin introducerea într-o matrice cu proprietăţi mecanice foarte slabe ale unor fibre sau incluziuni dintr-un material cu proprietăţi de rezistenţă mai bune. Rezultatul este un material anizotrop care se comportă foarte bine la anumite solicitări. Coeficienţii elastici ai matricei sau incluziunii sunt foarte diferiţi, dar periodici în variabilele spaţiale. Tocmai această periodicitate permite aplicarea metodei omogenizării la studiul materialelor compozite. De fapt, limita către care tinde soluţia ecuaţiei considerate şi ecuaţia pe care o verifică această limită (cu nişte coeficienţi diferiţi de limita celor de la care s-a plecat) reprezintă comportarea macroscopică a materialului compozit.

Dacă dimensiunile perioadei sunt mici în comparaţie cu mărimea domeniului în care studiem problema la limită, atunci se introduce un parametru mic $\varepsilon$, definit ca fiind raportul dintre dimensiunile perioadei şi dimensiunile corpului, în funcţie de care se va încerca să obţinem o dezvoltare asimptotică a soluţiei. Introducând acest parametru mic se introduce problema iniţială într-o familie de probleme parametrizată după $\varepsilon$ şi se studiază comportarea problemei când $\varepsilon \to 0$.

Din punct de vedere matematic aceasta revine la a ne da o familie de operatori $A^{\varepsilon}$, depinzând de $\varepsilon$, ai căror coeficienţi sunt funcţii periodice în variabilele spaţiale. În acest fel, în domeniul $\Omega$, vom avea o problemă la limită, numită problema $\varepsilon$:

$$A^{\varepsilon}u^{\varepsilon} = f \text{ în } \Omega \tag{1.1}$$

cu $u^{\varepsilon}$ supus la condiţii iniţiale şi la limită adecvate.

Vom încerca, dacă este posibil, să obţinem pentru $u^{\varepsilon}$ o dezvoltare asimptotică de forma:

$$u^{\varepsilon} = u^0 + \varepsilon u^1 + \cdots \tag{1.2}$$

care va permite calculul coeficienţilor omogenizaţi. Rezultatul standard al acestei metode este acela ca $u^0$ satisface o ecuaţie de forma

$$Au^0 = f \text{ în } \Omega \tag{1.3}$$

cu condiţii iniţiale şi la limită adecvate şi că pentru $\varepsilon \to 0$ soluţia $u^{\varepsilon}$ a problemei (1.1) tinde către soluţia $u^0$ a problemei (1.3).

## 2. PRINCIPIUL METODEI

Fie $\Omega$ un domeniu din $\mathbb{R}^3$ în coordonatele $x_i$ (fig. a). Vom considera în spaţiul $\mathbb{R}^3$ al coordonatelor $y_i$ un paralelipiped de laturi $y_i^0$ (fig. b) şi paralelipipedele obţinute prin translaţia $n_i y_i^0$ ( $n_i$ întreg ) în direcţiile axelor.

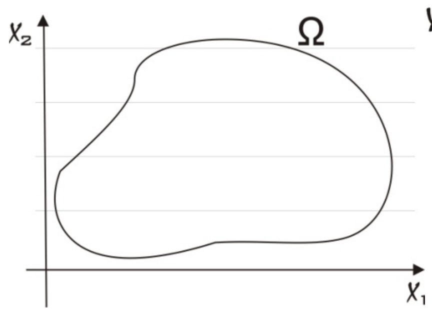


Fig.a

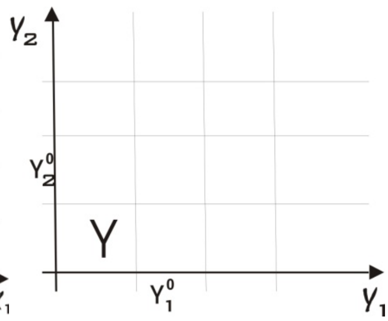


Fig. b

Vom considera funcţiile Y-periodice $a_{ij}(y) = a_{ji}(y)$ care verifică condiţia :

$$\exists \gamma > 0 \text{ a.î. } a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \ge \gamma\xi_i\xi_i,\ \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3 .$$

Definim funcţiile $a_{ij}^{\varepsilon}(x) = a_{ij}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ cu ε parametru pozitiv real, care sunt εY-pozitive în variabila x (εY e paralelipipedul de laturi $\varepsilon y_i^0$).

Atunci, dacă f(x) este o funcţie netedă dată definită pe Ω, vom considera problema la limită

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\varepsilon}(x)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)=f(x) \text{ în } \Omega \tag{2.3}$$

$$u^{\varepsilon}=0 \text{ pe } \partial\Omega. \tag{2.4}$$

Această problemă pentru ε fixat admite o soluţie unică datorită condiţiei de elipticitate.

Analog cu (2.2) vom defini vectorul $\overrightarrow{p^{\varepsilon}}$ de componente

$$p_i^{\varepsilon}(x)=a_{ij}^{\varepsilon}(x)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}. \tag{2.5}$$

Vom căuta pentru $u^{\varepsilon}(x)$ o dezvoltare asimptotică în funcţie de ε, pentru ε→0 şi anume o dezvoltare în scări multiple de forma:

$$u^{\varepsilon}(x)=u^0(x)+\varepsilon u^1(x,y)+\varepsilon^2u^2(x,y)+\cdots,\ y=\frac{x}{\varepsilon} \tag{2.6}$$

unde $u^i(x,y)$ sunt Y-periodice în variabila y.

În acest fel, noi postulăm existenţa funcţiilor $u^i(x,y)$ definite pentru $x\in\Omega$ şi $y\in\mathbb{R}^3$ independente de $\varepsilon$, Y-periodice în y şi astfel încât pentru $y=\frac{x}{\varepsilon}$, membrul drept al (2.6) să constituie o dezvoltare asimptotică pentru $u^i(x,y)$.

De fapt, funcţiile $u^i(x,y)$ definite pentru $x\in\Omega$ şi $y\in\mathbb{R}^3$ sunt astfel încât derivatete lor se comportă ca

$$\frac{d}{dx_i}\to\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

În felul acesta dependenţa de x este şi directă şi prin intermediul variabilei y.

Pentru a înţelege semnificaţia fizică a relaţiei (2.6) să considerăm $u^i(x,y)$ cu $\varepsilon$ mic.

Dacă comparăm valorile lui $u^i(x,\frac{x}{\varepsilon})$ în două puncte $P_1$ şi $P_2$ omoloage prin periodicitate în perioade vecine, se vede că dependenţa în $\frac{x}{\varepsilon}$ este aceeaşi, iar dependenţa în x e aproape aceeaşi căci distanţa $P_1P_2$ e mică iar $u^i$ e funcţie netedă.

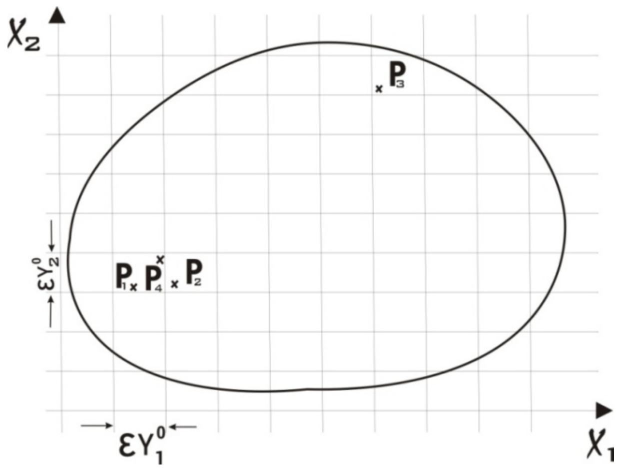


Fig. c

Fie acum $P_3$ punctul omolog lui $P_1$ prin periodicitate, situat departe de $P_1$. Dependenţa lui $u^1$ în y este aceeaşi, dar dependenţa în x este diferită deoarece $P_1$ şi $P_4$ nu mai sunt apropiate.

Să comparăm acum valorile lui $u^i$ în două puncte $P_1$ şi $P_2$ situate în aceeaşi perioadă. Dependenţa în x este aproape aceeaşi deoarece $P_1$ şi $P_4$ sunt foarte apropiate, pe când dependenţa în y e diferită deoarece $P_1$ şi $P_4$ nu sunt omoloage prin periodicitate. De fapt, distanţa $P_1P_4$ este mare măsurată în variabila y. Astfel de funcţii conduc la ideea de local periodicitate. Funcţia $u^\varepsilon$ va depinde de coeficienţii $a_{ij}$, de f şi de frontiera $\partial\Omega$. Este, deci, natural s-o căutăm sub forma (2.6) depinzând de x într-o formă periodică de perioadă $\varepsilon Y$ şi una neperiodică. În orice caz, dezvoltarea (2.6) este valabilă departe de frontiera $\partial\Omega$ unde fenomenele aperiodice sunt preponderente. In (2.6) am presupus $u^0$, dar acest lucru nu este esenţial. Putem considera $u^1(x,y)$ şi din raţionamente simple obţinem că $u^0$ este constantă în variabila y. Acest lucru arată că $u^\varepsilon(x)$ este o funcţie $u^0(x)$ plus nişte termeni mici rapid oscilanţi.

În următoarea etapă se calculează folosind (2.6) expresiile lui $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial u_i}$ şi ale lui $p^\varepsilon$:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)(u^0 + \varepsilon u^1 + \cdots) = \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u^1}{\partial y_i} + \varepsilon\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_i} + \frac{\partial u^2}{\partial y_i}\right) + \cdots \tag{2.7}$$

$$p_i^\varepsilon(x) = p_i^0(x,y) + \varepsilon p_i^1(x,y) + \cdots \tag{2.8}$$

unde

$$p_i^0(x,y)=a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}+\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right),\ p_i^1(x,y)=a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_j}+\frac{\partial u^2}{\partial y_j}\right). \qquad (2.9)$$

Acum ecuaţia (2.3) se poate scrie

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)(p_i^0+\varepsilon p_i^1+\cdots)=f(x). \qquad (2.10)$$

Identificând puterile succesive ale lui $\varepsilon$ în (2.10) găsim termenii de ordinul $\varepsilon^{-1}$

$$\frac{\partial p_i^0}{\partial y_i}=0 \qquad (2.11)$$

şi de ordinul $\varepsilon^0$

$$-\frac{\partial p_i^0}{\partial x_i}-\frac{\partial p_i^1}{\partial y_i}=f. \qquad (2.12)$$

Ecuaţia (2.11) se numeşte ecuaţia locală sau microscopică şi ea ne va conduce la calculul coeficienţilor omogenizaţi, iar (2.12) ne va furniza ecuaţia omogenizată sau macroscopică.

Pentru aceasta vom introduce mai intâi operatorul de medie definit pentru orice funcţie $\Phi(y)$ Y-periodică:

$$<\Phi>=\frac{1}{|Y|}\int_Y \Phi(y)dy, \qquad (2.13)$$

unde |Y| este măsura lui Y (volumul celulei de periodicitate). Este clar că $<\Phi>$ nu depinde de y, iar dacă $\Phi$ este o funcţie şi de x, atunci operatorul de medie comută cu derivata în raport cu x. Pentru a obţine ecuaţia omogenizată vom aplica operatorul (2.13) relaţiei (2.12)

$$-\frac{\partial <p_i^0>}{\partial x_i}-\left\langle\frac{\partial p_i^1}{\partial y_i}\right\rangle=f, \qquad (2.14)$$

unde am ţinut cont că $<f> = f$ pentru că f depinde doar de x.

Calculăm acum

$$\left\langle\frac{\partial p_i^1}{\partial y_i}\right\rangle=\frac{1}{|Y|}\int_Y\frac{\partial p_i^1}{\partial y_i}dy=\frac{1}{|Y|}\int_{\partial Y}p_i^1 n_i ds=0.$$

Egalitatea cu zero rezultă din Y-periodicitatea lui $p_i^1$ şi din faptul că $\vec{n}$ este vectorul normal la frontiera lui Y.

Atunci (2.14) devine

$$-\frac{\partial \left\langle p_i^0 \right\rangle}{\partial x_i} = f(x) \tag{2.15}$$

numită ecuaţie macroscopică sau omogenizată.

Să notăm că $\left\langle p_i^0 \right\rangle$ este acum o funcţie numai de x. Dar noi nu ştim modul în care $p_i^0$ depinde de $u^0$. Această dependenţă se află studiind problema locală (2.11). Folosind rezultatul (2.9), relatia (2.11) se scrie

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u^0}{\partial x_j}+\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right)\right]=0\\ -\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}(y)\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right]=\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}\end{gathered} \tag{2.16}$$

Ecuaţia (2.16) va fi tratată ca o ecuaţie în necunoscuta $u^1(y)$, $u^0(x)$ fiind considerat cunoscut. Evident ca acestea depind de x, dar x va fi considerat ca simplu parametru pentru problema (2.16) formulată în variabila y.

În plus, noi căutăm soluţia $u^1(y)$ Y-periodică şi această condiţie ţine loc de condiţie la frontieră pentru problema (2.16).

Deci problema (2.16) este tot o problemă de tip eliptic, membrul drept fiind cunoscut. Înainte de a trece la rezolvarea problemei (2.16) trebuie să fim siguri că aceasta admite o soluţie unică. Acest lucru ne este asigurat de următoarea lemă.

**Lemă:**

Ecuaţia $-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\right)=F$, cu $\varphi$ Y-periodică, admite o soluţie unică (mai puţin, o constantă aditivă) dacă $\int_Y F(y)dy=0$.

Deci, pentru (2.16) condiţia cerută de această lemă este $\int_Y \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}dy=0$, ceea ce este adevarat din Y-periodicitatea coeficienţilor .

Pentru determinarea efectivă a soluţiei problemei (2.16) este necesară introducerea spaţiului

$$V_Y=\left\{u\in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3);\ u\ \ \text{Y - periodică}\right\}$$

Atunci (2.16) este echivalentă cu următoarea problemă: să se găsească $u^1\in V_Y$ care verifică

$$\int_Y a_{ij}(y)\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_i}dy = \frac{\partial u^0}{\partial x_j}\int_Y \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}vdy\ ,\ \forall v \in V_Y\ . \qquad (2.17)$$

Această echivalenţă se demonstrează uşor dacă înmulţim (2.16) cu o funcţie test $v \in V_Y$ şi integrăm în Y. Ţinând cont de calculul

$$\int_Y a_{ij}\frac{\partial u^1}{\partial y_j}vdy + \int_Y a_{ij}(y)\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_i}dy = \int_{\partial Y} n_i a_{ij}\frac{\partial u^1}{\partial y_j}vds = 0\ ,$$

rezultă

$$-\int_Y a_{ij}\frac{\partial u^1}{\partial y_j}vdy = \int_Y a_{ij}(y)\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_i}dy\ .$$

Dar

$$-\int_Y a_{ij}\frac{\partial u^1}{\partial y_j}vdy = \int_Y \frac{\partial u^0}{\partial x_j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}vdy\ ,$$

prin urmare rezultă:

$$\int_Y a_{ij}(y)\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_i}dy = \frac{\partial u^0}{\partial x_j}\int_Y \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}vdy\ .$$

Reciproc, dacă $u^1$ satisface (2.17), folosind acelaşi calcul ca mai sus, rezultă

$$\int_Y \left[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right) + \frac{\partial u^0}{\partial x_j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}\right]vdy = 0\ ,\ \forall v \in V_Y$$

ceea ca implică(2.16).

Dacă introducem acum $\chi^k$ soluţia unică a următoarei probleme: să se găsească $\chi^k \in V_Y$ astfel încât $\langle \chi^k \rangle = 0$, satisfăcând

$$\int_Y a_{ij}(y)\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_i}dy = \frac{\partial u^0}{\partial x_j}\int_Y \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_i}vdy\ ,\ \forall v \in V_Y\ . \qquad (2.18)$$

atunci din liniaritatea problemei (2.17) se vede că soluţia acesteia se scrie sub forma

$$u^1(x,y) = \frac{\partial u^0}{\partial x_k}\chi^k y + C(x)\ , \qquad (2.19)$$

unde C(x) este o constantă aditivă (în funcţie de x). Odată aflată expresia lui $u^1(x,y)$ în funcţie de $u^0$ se poate trece la aflarea coeficienţilor omogenizaţi. Din relaţiile (2.9) şi (2.19) avem

$$p_i^0(x,y) = a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right) = a_{ij}(y)\left(C + \frac{\partial u^0}{\partial x_k}\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\right)$$
$$= \left(a_{ik}(y) + a_{ij}(y)\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\right).$$

Aplicând acestei relaţii operatorul de medie (2.13), rezultă

$$p_i^0(x) = a_{ik}^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_k}, \tag{2.20}$$

şi

$$p_{ik}^0 = \left\langle a_{ik}(y) + a_{ij}(y)\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\right\rangle = \left\langle a_{ij}(y)(\delta_{jk} + \frac{\partial \chi^k}{\partial y_j})\right\rangle = \left\langle a_{ik}(y)\right\rangle + \left\langle a_{ij}\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\right\rangle \tag{2.21}$$

Acum (2.15) devine o ecuaţie în $u^0$ cu coeficienţi constanţi

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik}^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right) = f, \tag{2.22}$$

Din (2.4) se observă că pentru ecuaţia (2.22) condiţia la limită este

$$u^0(x)\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.23}$$

## CONCLUZII

Modelul matematic cel mai clar care ilustrează metoda omogenizării este un material compozit. El se obţine prin introducerea într-o matrice cu proprietăţi mecanice foarte slabe a unor fibre sau incluziuni dintr-un material cu proprietăţi de rezistenţă mai bune. Limita către care tinde soluţia ecuaţiei considerate şi ecuaţia pe care o verifică această limită (cu nişte coeficienţi diferiţi de limita celor de la care s-a plecat) reprezintă comportarea macroscopică a materialului compozit.

Introducând parametrul mic $\varepsilon$ se include problema iniţială într-o familie parametrizată de probleme şi se studiază comportarea soluţiei când $\varepsilon \to 0$. Din punct de vedere mecanic, aceasta revine la a descrie trecerea de la studiul local sau microscopic al fenomenului la studiul macroscopic.

În (1.3) $A$ este un operator cu coeficienţi constanţi, numit operator omogenizat, iar sensul acestei terminologii trebuie înţeles astfel: $u^0$, care satisface o ecuaţie cu coeficienţi constanţi, aproximează soluţia $u^\varepsilon$ care este foarte dificil de aflat. În acest fel, dependenţa de structura microscopică este obţinută prin intermediul coeficienţilor omogenizaţi.

## BIBLIOGRAFIE


1. Sancez-Palencia*, Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, 1980
2. Ene H., and Paşa G., *Metoda omogenizării. Aplicaţii la teoria materialelor compozite*, Editura Academiei RSR, 1987
3. Cristescu N., *Mecanica meterialelor compozite*,Univ. Bucureşti, 1983
4. Ciorănescu, D., and Saint Jean Paulin, J., *Homogenization in open sets with holes*. J. Math.Anal.and Appl.,1979
5. Ciorănescu D., and Saint Jean Paulin, J.,*Reinforced and Honeycomb structures*. J Math.Pures et Appl.,1986



**Abstract:**

The theoretic researches that took place until the present have lead to the elaboration of a number of methods of homogenization concerning the behavior of certain heterogeneous materials obtained as mixtures of materials with well defined properties. For elliptical equations, the goal is to obtain an asymptotic development of the solution, which allows us to calculate the homogenized coefficients. The mathematical model which illustrates the homogenizing method in the clearest manner is a composite material. It is obtained by introducing certain fibers or inclusions from a material with better resistance properties in a matrix with very poor mechanical properties. The limit to which the solution of the considered equation tends to and the equation which this limit checks out (with some coefficients being different from the limit of those from which we started) represents the macroscopic behavior of the composite material.

By introducing the small parameter $\varepsilon$ the initial problem is included in a parameterized family of problems and we will study the behavior of the solution when $\varepsilon \to 0$. From a mechanical point of view, this means describing the transition from local or microscopic study of the phenomenon to macroscopic study.

In (1.3) $A$ is an operator with constant coefficients, called a homogenized operator, and the meaning of this terminology must be understood in this way: $u^0$, which satisfies an equation with constant coefficients approximates the solution $u^\varepsilon$ which is very difficult to calculate. Thus, the dependency for microscopic structure is obtained using homogenized coefficients.