MODELE ÎNTREGI CU SUMĂ CONSTANTĂ ŞI VARIABILE CU DOMENIU UNIFORM

SILVIU BÂRZĂ
Universitatea Spiru Haret

Rezumat: Lucrarea de faţă este o abordare prin programarea procentuală a unei probleme clasice din optimizarea combinatorială, şi anume problema de tip rucsac, dată într-un caz particular al problemei generale, altul decât cazul rucsacului 0-1.

Se arată că, în condiţiile speciale ale programării procentuale, există un procedeu de reducere a problemei, care prin repetare poate constitui un algoritm eficient de rezolvare a problemei considerate.

Cuvinte cheie: programare liniară, optimizare combinatorială, programare procentuală.

I. INTRODUCERE

În lucrări anterioare am considerat transformarea problemelor procentuale date ca probleme de programare liniară continuă în probleme de programare combinatorială. Am plecat de la problemele procentuale care au forma generală:

$$\begin{cases} opt\ cx \\ A^1 x \le b^1 \\ A^2 x \ge b^2 \\ \mathbf{1} \cdot x = 1 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

unde, c este vectorul de dimensiune n al coeficienţilor funcţiei obiectiv, funcţie care cuantifică proprietatea avută în vedere în procesul de optimizare; $A^1 x \le b^1$ şi $A^2 x \ge b^2$ reprezintă sistemul de inecuaţii prin care sunt exprimate alte proprietăţi dorite pentru amestec în anumite limite, A^1 fiind o matrice cu m^1 linii şi n coloane, A^2 o matrice cu m^2 linii şi n coloane, b^1 un vector de dimensiune m^1 şi b^2 un vector de dimensiune m^2;

$\mathbf{1}$ este un vector de dimensiune n cu toate componentele egale cu 1 cu ajotorul căruia se exprimă condiţia de sumă unitară. În plus, se consideră că toate valorile care intervin în exprimarea modelului sunt nenegative, cele din funcţia obiectiv şi din membrii drepţi ai inecuaţiilor condiţii fiind chiar pozitiv definite.

În forma extinsă acest model poate fi rescris sub forma:

$$\begin{cases} opt\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^1 x_i \le b_j^1 \quad pentru \quad j=1,...,m^1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 x_i \ge b_j^2 \quad pentru \quad j=1,...,m^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0 \qquad orice \quad i=1,...,n \end{cases} \tag{2}$$

unde, aşa cum am văzut mai sus pentru coeficienţii funcţiei obiectiv şi pentru valorile matricilor A^1 şi A^2, şi pentru vectorii b^1 şi b^2 sunt îndeplinite următoarele condiţii:

- $c_i > 0$ pentru orice $i = 1,...,n$;
- $a_{ij}^1 \ge 0$ pentru orice $i = 1,...,n$ şi pentru orice $j = 1,...,m^1$;
- $a_{ij}^2 \ge 0$ pentru orice $i = 1,...,n$ şi pentru orice $j = 1,...,m^2$;
- $b_j^1 > 0$ pentru orice $j = 1,...,m^1$ şi
- $b_j^2 > 0$ pentru orice $j = 1,...,m^2$.

Pentru evitarea unor neajunsuri care pot apare în rezolvarea acestor probleme şi care sunt datorate aproximărilor făcute şi lucrului cu valori în general mici am propus o discretizare a modelelor (1) (sau (2)) ajungând la modelul combinatorial de forma:

$$\begin{cases} opt\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^1 y_i \le \alpha b_j^1 \quad pentru \quad j=1,....m^1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 y_i \ge \alpha b_j^2 \quad pentru \quad j=1,...,m^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha \\ y_i \in [0,\alpha] \qquad pentru \quad i=1,...,n \end{cases} \tag{3}$$

unde $\alpha = 10^k$, este dependent de precizia stabilită pentru obţinerea rezultatelor (prin aproximarea la k zecimale exacte). Acest model poate fi scris condensat sub forma:

$$\begin{cases} opt\ cy \\ A^1 y \le \alpha b^1 \\ A^2 y \ge \alpha b^2 \\ \mathbf{1} \cdot y = \alpha \\ y \in \{0,1,\ldots,\alpha\}^n \end{cases} \tag{4}$$

II. MODEL DE OPTIMIZARE COMBINATORIALĂ CU VARIABILE UNIFORME ŞI CONDIŢIE EXPLICITĂ DE SUMĂ CONSTANTĂ

Considerăm în continuare un caz particular al modelelor de optimizare combinatorială în care vom evidenţia separat o condiţie particulară cu egalitate şi în care domeniile tuturor variabilelor sunt identice. Această problemă este una particulară de tipul rucsac general.

Considerăm că variabilele modelului sunt fiecare în domeniul $\{0,1,2,\ldots,p\} \in N$. Modelul particular considerat este de forma

$$\begin{cases} opt\ cx \\ A^1 x \le b^1 \\ A^2 x \ge b^2 \\ \mathbf{1} \cdot x = P \\ x_i \in \{0,1,\ldots,p\},\ i = 1,2,\ldots,n \end{cases} \tag{5}$$

unde $P \in N$. După cum se poate observa acest model este similar ca formă cu modelul (4), cu deosebirea că aici în locul condiţiei de tip sumă unitară avem o condiţie de sumă constantă.

Din enunţarea nodelului este clar că se impune suplimentar condiţia $np \ge P$. În adevăr, cum orice i, $p \ge x_i$, prin sumare membru cu membru avem

$$np = \sum_{i=1}^{n} p \ge \sum_{i-1}^{n} x_i = P .$$

Astfel, dacă $np \ge P$ nu este îndeplinită, atunci problema (5) nu are soluţii admisibile, deci modelul considerat nu are soluţii.

Datorită similitudinii modelului (5) cu modelul (4) şi a transformărilor bijective care au dus la transformarea modelului (1) în modelul (4), rezultă că modelul (5) poate fi considerat la rândul său un model de programare procentuală.

Modelul (5) este un caz particular de model rucsac general cu variabile uniforme, având condiţie explicită de sumă constantă. Putem trage astfel următoarea concluzie:

Propoziţie: *Clasa modelelor rucsac general cu variabile uniforme şi condiţie explicită de sumă constantă este subclasă a clasei modelelor procentuale.*

În continuare, ca în cazul problemelor de programare procentuală putem considera doar problemele în care coeficienţii funcţiei obiectiv sunt ordonaţi. Acest lucru nu restrânge generalitatea, deoarece orice problemă poate fi redusă la una având coeficienţii funcţiei obiectiv ordonaţi prin aplicarea unei permutări asupra variabilelor. De asemenea, vom considera modelul în care optimul căutat este un maxim. Pentru minim se poate proceda similar.

III. CARACTERIZĂRI ALE SOLUŢIILOR PENTRU MODELUL RUCSAC GENERAL CU VARIABILE UNIFORME ŞI CONDIŢIE EXPLICITĂ DE SUMĂ CONSTANTĂ

În continuare, deoarece $p, P \in N \subset Z$, putem determina $q, r \in N$ astfel încât $P = pq + r$ şi condiţia de sumă constantă şi fie scrisă sub forma $\mathbf{1} \cdot x = pq + r$, unde q şi r se determină pe baza proprietăţilor de monotonie a vectorilor soluţie admisibilă pentru problemele de optimizare procentuală şi q reprezintă numărul valorilor x_i egale cu p în vectorii soluţie admisibilă.

Propoziţie. $q \le \left[\dfrac{P}{p}\right]$, *unde* $[\bullet]$ *desemnează partea întragă a unui număr.*

Demonstraţie. Presupunem că $s \le \dfrac{P}{p} < s+1$ şi $q \ge s+1$, deci cel puţin primele $s+1$ valori din vectorul x au valoarea p. Astfel,

$$\mathbf{1} \cdot x = x_1 + \ldots + x_q + x_{q+1} + \ldots + x_n = p + \ldots + p + x_{q+1} + \ldots + x_n$$

$$= pq + x_{q+1} + \ldots + x_n \ge pq \ge p(s+1) > p\frac{P}{p} = P \quad ,$$

deci $\mathbf{1} \cdot x > P$. Contradicţie.

Fie $t = 0$ reprezentând numărul minim de valori x_i egale cu p într-o soluţie admisibilă pentru problema (5)

(rel1) Dacă t valori x_i sunt egale cu p, atunci restul valorilor ($n-t$) sunt cel mult egale cu $p-1$ şi astfel, prin înlocuire în modelul (5) se obţine

$$
\begin{cases}
\max p(c_1 + \ldots + c_t) + c_{t+1}x_{t+1} + \ldots + c_n x_n \\
A^1(p,\ldots,p,x_{t+1},\ldots,x_n)^T \le b^1 \\
A2(p,\ldots,p,x_{t+1},\ldots,x_n)^T \ge b^2 \\
pt + x_{t+1} + \ldots + x_n = P \\
x_i \in \{0,1,\ldots,p-1\},\ i = t+1,\ldots,n
\end{cases}
\tag{6}
$$

care prin eliminarea constantelor poate fi redus la

$$
\begin{cases}
\max \bar{c}y \\
\bar{A}^1 y \le \bar{b}^1 \\
\bar{A}^2 y \ge \bar{b}^2 \\
\mathbf{1} \cdot y = \bar{P} \\
y_i \in \{0,1,\ldots,p-1\},\ i = 1,\ldots,n-t
\end{cases}
\tag{7}
$$

unde $y = (y_1,\ldots,y_{n-t})$, $\bar{c} = (c_{t+1},\ldots,c_n)$, $\bar{A}^1, \bar{A}^2$ se obţin din A^1, respectiv A^2, prin eliminarea primelor t coloane, $\bar{P} = P - pt$, $\bar{b}_i^1 = b_i^1 - p\sum_{j=1}^{t} a_{ij}^1$ şi $\bar{b}_i^2 = b_i^2 - p\sum_{j=1}^{t} a_{ij}^2$.

Pentru îndeplinirea condiţiilor de admisibilitate cu sumă constantă pentru (7) avem acum $(n-t)(p-1) \ge \bar{P}$, deci

$$
n(p-1) + t \ge P
$$

Dacă această condiţie nu este îndeplinită, atunci t se înlocuieşte cu $t+1$ şi raţionamentul care a început la paragraful (rel1).

Dacă ultima condiţie este îndeplinită, atunci s-a obţinut un t astfel încât $t \le q$. Cum din propoziţia anterioară avem $q \le \left[\frac{P}{p}\right]$, rezultă că procedeul descris mai sus pentru determinarea lui t se poate aplica doar de un numar finit de ori şi astfel constituie un algoritm de determinare a lui q, care produce în plus o reducere a problemei prin restrângerea domeniului variabilelor şi eventual scăderea numărului acestora.

IV. CONCLUZII

Lucrarea de faţă este o abordare prin programarea procentuală a unei probleme clasice din optimizarea combinatorială, şi anume problema de tip rucsac, dată într-un caz particular al problemei generale, altul decât cazul rucsacului 0-1.

Se arată că în condiţiile speciale ale programării procentuale, există un procedeu de reducere a problemei, care prin repetare poate constitui un algoritm eficient de rezolvare a problemei considerate.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Şerbulescu, M. Ciocoiu, S. Bârză, *Optimizarea reţetelor de amestec fibros destinate obţinerii fibrelor cardate prin utilizarea algoritmului simplex*, Revista Română de Textile-Pielărie nr.4/2000, pp.11-16;
2. S. Bârză, L. Şerbulescu, *Rezolvarea problemelor de programare liniară prin algoritmul simplex clasic*, Revista Română de textile-pielărie nr. 1/2001, pp. 11-16;
3. S. Bârză, *Principalele instrumente utilizate în formularea problemelor de programare matematică bazată pe combinatorică (retrospectivă).* Comunicare la simpozionul ICEC-2002, octombrie 2002;
4. S. Bârză, *Programare procentuală: formulări şi proprietăţi*, Revista de informatică, nr. 1, 2004, Inforec, Bucureşti.
5. S. Bârză, *Programare procentuală: proprietăţi ale soluţiilor*, Revista de informatică, nr. 2, 2004, Inforec, Bucureşti.
6. Goemans M.X., *Semidefinite Programming and Combinatorial Optimization*, Doc. Math. Extra Volume ICM, 1998, 657-666
7. Goemans M.X., Rendl F., *Semidefinite Programming in Combinatorial Optimization*, November 1999
8. Hoffman K.L., *Combinatorial Optimization: Current Successes and Directions for the Future*, Journal of Computational and Applied Mathematics 124 pp.341, 2000
9. Nemhauser G.L., Wolsey L.A., *Integer and combinatorial optimization*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1999.

Abstract: This paper presents a class of problems viewed as percentage programming as was introduced earlier. We start from a particular integer programming problems covered by polyhedral linear problem. Our consideration could be important as a better algorithm based on percentage programming properties as was already described.