LIMBAJE LEONTIEF PROBABILISTE

AURORA BACIU
Universitatea Spiru Haret

Rezumat: În articol se introduce noţiunea de probabilitate la gramaticile Leontief studiate în [1] definind gramaticile Leontief probabiliste, care generează limbaje Leontief probabiliste. Pentru aceste limbaje se studiază două proprietăţi de închidere.

Cuvinte cheie: gramatică Leontief probabilistă, limbaj Leontief probabilist.

1. INTRODUCERE

În teoria gramaticilor şi limbajelor formale, prin definirea noţiunilor de mulţime fuzzy şi de probabilitate, s-au definit conceptele de gramatică fuzzy şi de gramatică probabilistică, în scopul creerii unor noi mecanisme cu o putere generativă mai mare decât cele imaginate anterior.

Modelul input-output, conceput de Leontief [3], a sugerat definirea unei noi clase de limbaje, care reprezintă un model lingvistic al sistemelor input-output, şi anume clasa limbajelor Leontief.

2. GRAMATICI ŞI LIMBAJE LEONTIEF

Sistemul economic al legăturilor dintre ramuri este un sistem de tip input-output de forma:

$$X = AX + Y,$$

unde $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1,n}$ este matricea coeficienţilor cheltuielilor directe, numită matricea Leontief cu $0 \le a_{ij} \le 1$, X şi Y sunt vectorii $X = (x_1,...,x_n)^T$ şi $Y = (y_1,...,y_n)^T$.

Fie A matricea Leontief corespunzătoare ramurilor $R_1,...,R_n$ şi două mulţimi M şi K.

Definiţie. *O gramatică Leontief de ordin* n *este o gramatică*

$$G = (V_n, \Sigma, S, P, M = \{M_1,...,M_n\}, K = \{K_1,...,K_n\}),$$

unde $V_n = \{S, R_1,....,R_n\}$ *reprezintă mulţimea neterminalelor,* $\Sigma = \{a_{ij} / i, j = 1,...,n\}$ *este alfabetul terminal,* S *este simbolul start definit de reguli de producţie* P *de forma:*

$$S \to R_i \qquad \forall i = 1,...,n$$
$$R_i \to a_{ij} R_j \qquad \forall j \in M_i \subset \{1,...,n\}$$
$$R_i \to a_{ij} \qquad \forall j \in K_j \subset \{1,...,n\}$$

Este probabil ca $M_i = \phi$ sau $K_j = \phi$ sau amândouă.

Un limbaj Leontief generat de o gramatică Leontief este notat $L = L(G)$. Clasa limbajelor Leontief L, se notează prin $\mathscr{L}_{\mathscr{L}}$.

În [1] se arată că limbajele Leontief care reprezintă modele lingvistico-matematice ale sistemelor input-output formează o subclasă a clasei limbajelor regulate.

3. GRAMATICI ŞI LIMBAJE LEONTIEF PROBABILISTE

Definitie. *O gramatică Leontief probabilistică este*

$$G_P = (V_n, \Sigma, S, P, M, K, x_S, x_{R_1}, ..., x_{R_n})$$

unde V_n, Σ, S, P, M, K *au semnificaţia prezentată la gramatici Leontief iar* $x_S, x_{R_1}, ..., x_{R_n}$ *sunt variabile aleatoare ataşate neterminalelor gramaticii* G.

În gramatica Leontief probabilistică o regulă de producţie poate fi aplicată cu o anumită probabilitate. Toate regulile care au în membrul stâng acelaşi terminal R_i sunt considerate ca evenimente ale variabilei aleatoare x_{R_i}.

Un cuvânt generat prin derivatele:

$$D_1 : S \overset{p_1}{\Longrightarrow} \alpha_1 \overset{p_2}{\Longrightarrow} \alpha_2, ..., \overset{p_n}{\Longrightarrow} \alpha_n = v$$
$$D_2 : S \overset{q_1}{\Longrightarrow} \beta_1 \overset{q_2}{\Longrightarrow} \beta_2, ..., \overset{q_n}{\Longrightarrow} \beta_n = v$$

cu $p = p_1, p_2, ..., p_n$ şi $q = q_1, q_2, ..., q_n$, atunci în gramatica G cuvântul v va fi generat cu probabilitatea $p \oplus q$, unde:

$$p \oplus q = p + q - pq$$

Se poate demonstra teorema:

Teorema 1. *Clasa limbajelor Leontief* $\mathscr{L}_{\mathscr{L}}$ *este inclusă în clasa limbajelor Leontief probabiliste, notată* $\mathscr{L}_{\mathscr{L}}$p, *generată de gramatica Leontief probabilistă.*

Demonstraţie. Fie $L \subset \mathscr{L}_{\mathscr{L}}$ şi $G = (V_n, \Sigma, S, P, M, K)$ gramatica Leontief de ordin *n* care generează limbajul L.

Fie o gramatică Leontief probabilistă G_p unde :

$$x_s : \begin{pmatrix} S \to R_1 & ... & S \to R_n \\ 1/n & & 1/n \end{pmatrix}$$

Dacă card $(M_i \bigcup K_i) = m_i + k_i$

$$x_{R_1}:\begin{pmatrix} R_1 \to a_{ij_1}R_{j_1},\ldots,R_i \to a_{ij_S}R_{j_S} & R_i \to a_{ij_{K_1}},\ldots,R_i \to a_{ij_{K_1}} \\ \frac{1}{m_i+k_i},\ \ldots\ ,\frac{1}{m_i+k_i} & \frac{1}{m_i+k_i},\ \ldots\ ,\frac{1}{m_i+k_i} \end{pmatrix}$$

Se arată că orice cuvânt din $L = L(G)$ este generat de G_p cu probabilitatea

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m_{i_1}+k_{i_1}}\cdot\frac{1}{m_{i_2}+k_{i_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{m_{i_{r-1}}+k_{i_{r-1}}}\cdot\frac{1}{m_{i_r}+k_{i_r}}=$$

$$\frac{1}{n(m_{i_1}+k_{i_1})(m_{i_2}+k_{i_2})\ldots(m_{i_{r-1}}+k_{i_{r-1}})(m_{i_r}+k_{i_r})}$$

Gramatica G_p este consistentă în sensul definiţiei din [4].

L nu este un limbaj Leontief [1], dar este un limbaj Leontief probabilist fiind generat de gramatica

$$G_p = (\{S,R_1,R_2\},\{a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\},P,S,M=(M_1,M_2),K=(K_1,K_2),x_S,x_{R_1},x_{R_2})$$

unde P:

$S \to R_1$ cu probabilitatea 1

$S \to R_2$ cu probabilitatea 0

$R_1 \to a_{11}R_1$ cu probabilitatea $1/4$

$R_1 \to a_{12}R_2$ cu probabilitatea $1/4$

$R_2 \to a_{21}R_1$ cu probabilitatea 1

$R_1 \to a_{12}R_2$ cu probabilitatea $1/4$

$R_1 \to a_{12}$ cu probabilitatea $1/4$

$M_1 = \{1,2\}$ $K_2 = \{1\}$

$$x_S:\begin{pmatrix} S\to R_1 & S\to R_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{R_1}:\begin{pmatrix} R_1\to a_{11}R_1 & R_1\to a_{12}R_2 & R_1\to a_{12}R_2 & R_1\to a_{12} \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$x_{R_2}:\begin{pmatrix} R_2\to a_{21}R_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se observă că cuvântul $a_{11}^n a_{12}(a_{21}a_{12})^n$ va fi generat cu probabilitatea $\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1\cdot\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{4^{2n+1}}$. Deci $L=\left\{a_{11}^n a_{12}(a_{21}a_{12})^n,\frac{1}{4^{2n+1}}\middle| n\ge 1\right\}$ ceea ce demonstrează teorema.

Teorema 2. *Fie* $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{\mathscr{L}}\mathrm{p}$ *peste acelaşi alfabet. Atunci şi* $L_1 \cup L_2$ *şi* $L_1 \cap L_2 \in \mathscr{L}_{\mathscr{L}}\mathrm{p}$.

Demonstraţie. Fie $L_1 = L\left(G_p^1\right)$ şi $L_2 = L\left(G_p^2\right)$ unde $G_p^1 = \left(V_N, \sum, P^1, S, x_{R_1}^1, ..., x_{R_n}^1\right)$ şi $G_p^2 = \left(V_N, \sum, P^2, S, x_{R_1}^2, ..., x_{R_n}^2\right)$.

Atunci $L_1 \bigcup L_2 = L(G_P)$, unde $G_P = (V_n, \Sigma, P, S, x_{R_1}, ..., x_{R_n})$ cu $P = P^1 \bigcup P^2$ şi $x_{R_i} = x_{R_i}^1 + x_{R_i}^2$, $i = \overline{1,n}$.

Limbajul $L_1 \bigcap L_2$ va fi generat de gramatica G_p^1 care este definită: $G_{P_1} = (V_n, \Sigma, S, P^1, x_{R_1}^1, ..., x_{R_n}^1)$ unde $P^1 = P_1 \bigcap P_2$.

Fie $q_{ir} = \max(P_{ir}^1, P_{ir}^2)$ unde P_{ir}^1 este probabilitatea cu care se aplică regula $R_i \to a_{ij_r} R_{j_r}$ cu gramatica G_P^1 şi P_{ir}^2 în G_P^2

Atunci

$$x_{R_i}^1 : \begin{pmatrix} R_1 \to a_{ij_1} R_{j_1} & \dots & R_i \to a_{ij_k} R_{j_k} \\ q_{ik} \Big/ \sum\limits_{r=1}^{k} q_{ir} & \dots & q_{ik} \Big/ \sum\limits_{r-1}^{k} q_{ir} \end{pmatrix}$$

Limbajele Leontief probabiliste modelează sisteme input-output probabiliste care ţin seama de aspectul natural al interdependenţelor dintre ramurile unui sistem economic, interdependenţe care la un moment dat apar cu anumite probabilităţi.

BIBLIOGRAFIE

1. Baciu A., Pascu A., *Leontief Type Grammars and Languages,* Foundations of Control Engeneering, Nr. 3, Vol. 1, (1979), 91-106.
2. Bucurescu I., Pascu A., *Gramatici contextuale fuzzy*, Rev. Roum. Math. Pures et. Appl, (1989).
3. Leontief W., *Input-output Analysis*, Scientific Publishing House, (1970).
4. Rafael C., Gonzales G., *Syntactic Pattern Recognition in Introduction Addison Wesley*, Publishing Company, Massachusettes, (1978).
5. Tilanus C.B., *Intra Firm Input-Output Analysis*, Proccedings of Euro II, (1976).

Abstract: This paper introduces the probability for Leontief grammars studied in [1] defining probabilistic Leontief grammars generating probabilistic Leontief languages. Two closing properties are studied.