

# O NOUĂ TEHNICĂ DE FILTRARE PENTRU SIMULAREA NUMERICĂ A FLUIDELOR TURBULENTE

ARGUS ADRIAN DUNCA

*Universitatea Spiru Haret*

**Rezumat:** În această lucrare este prezentată o nouă tehnică de filtrare în LES ce are o acuratețe mai mare în aproximare decât metoda de filtrare cu filtri diferențiali prezentată în [9]. Această metodă poate fi utilizată împreună cu metoda de deconvoluție aproximativă, ADM prezentată în [1, 2], pentru îmbunătățirea modelelor Stolz-Adams pentru fluide turbulente. Derivarea matematică a noilor modele este deasemenea prezentată.

**Cuvinte cheie:** LES (large eddy simulation), FEM (finite element methods), ADM (approximate deconvolution methods).

**AMS classification:** 76A60

## 1. FLUIDE TURBULENTE

Necesitatea unei simulări numerice de fluide turbulente cu scopul de a extrage informații utile apare în aplicații industriale (estimarea poluării rezultate în urma unor procese industriale, estimarea schimbărilor climaterice) [8], precum și în domeniul de cercetare, ca de pildă medicina, în probleme de design optimal de inimi și rinichi artificiali [4], [11].

Mișcarea fluidelor turbulente este descrisă în mod exact de ecuațiile Navier-Stokes, care sunt derivate din legile de conservare a masei și momentului

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}^T) - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{în } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla\mathbf{u} &= 0 \quad \text{în } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{în } \Omega, \\ \int_{\Omega} p dx &= 0 \quad \text{în } (0, T), \end{aligned} \tag{1}$$

unde  $\mathbf{u}$  este viteza fluidului,  $p$  este presiunea fluidului și  $\mathbf{f}$  este forța exterioară ce acționează asupra fluidului.

Caracterul turbulent al fluidului este dat din punct de vedere matematic de numărul Reynolds-Re al fluidului, care este definit ca  $\mathbf{Re} = \mathbf{l}\mathbf{v}/\nu$ , unde  $\mathbf{l}$  este o lungime caracteristică,  $\mathbf{v}$  este o viteză caracteristică,  $\nu$  este vâscozitatea cinematică a fluidului.

Rezolvare analitică a ecuațiilor (1) nu este posibilă decât în cazuri foarte simple, ce exclud extrapolarea metodelor folosite la cazuri practice. Prin urmare este necesară utilizarea de metode numerice pentru obținerea unei aproximări a fluidului. Rezolvarea directă a acestor ecuații folosind metode standard (diferențe finite, elemente finite), metoda numită DNS (simulare numerică directă) nu este practică, deoarece va duce la timpi de executare a programelor bazate pe aceste metode de ordinul lunilor sau chiar anilor pentru fluide foarte turbulente. Acest lucru este inacceptabil dacă se doresc rezultate foarte rapide (de pildă în estimarea schimbărilor climatice pe termen scurt).

Costurile computaționale pentru DNS apar datorită varietăților mari de structuri pe care un fluid turbulent le posedă. Așa cum a fost menționat mai sus, ecuațiile Navier-Stokes vor descrie toate aceste structuri (unele de mărime foarte mică) de unde necesitatea de a coborî rezoluția calculului numeric pe rețea foarte fină, de unde costurile computaționale ridicate.

Teoria K41 a lui Kolmogorov [12], în ce privește fluidele turbulente izotropice și omogene afirmă că structurile turbulente persistente dintr-un fluid turbulent sunt create în interiorul fluidului până la o scala minimală de mărime  $O(\text{Re}^{-3/4})$ .

Aceasta înseamnă că pe cubul unitate mărimea rețelei necesare pentru captarea mișcării acestor structuri trebuie să fie egală cu  $h \approx \text{Re}^{-3/4}$  ceea ce duce la  $N \approx \text{Re}^{-3/4}$  noduri pe rețea. Dacă  $\text{Re} \approx 10^6$  (cum se întâlnește în cazurile practice prezentate mai jos), atunci  $N \approx 10^{13.5}$ , mult prea multe grade de libertate, chiar pentru calculatoarele din vremurile noastre [15]. Prezentăm mai jos, vezi [15], câteva numere Reynolds, în câteva fluide turbulente:

$$\begin{aligned} &\text{pentru curenți de aer în jurul mașinilor, viteza caracteristică 3m/s} \\ &\text{Re} = 6 \cdot 10^5, \\ &\text{pentru curenți de aer în jurul avioanelor, viteza caracteristică 3m/s} \\ &\text{Re} = 2 \cdot 10^7, \\ &\text{pentru curenți atmosferici } \text{Re} = 10^{20}. \end{aligned} \tag{2}$$

O altă problemă în simularea numerică a ecuațiilor (1) apare la specificarea valorilor pe frontieră ale fluidului ce este calculat. Erorile de măsurare a valorilor vitezei fluidului pe frontieră pot conduce la erori mai mari în aproximarea vitezei fluidului în interior, mai ales în cazul fluidelor al căror caracter turbulent este determinat de interacțiunea cu frontierele (fluide în conducte, fluide ce întâlnesc obstacole) [3].

De asemenea, teoria matematică a ecuațiilor (1) conține multe puncte esențiale neelucidate încă. De pildă, în 3d nu se știe dacă soluția slabă a ecuațiilor (1) este unică sau nu.

Uitându-ne la modul în care fumul dintr-o țigară se amestecă cu aerul, la apa unui râu învolburat, sau la praful ridicat în aer în condiții de vânt puternic ne putem da seama de caracterul aleator al vitezei unui fluid turbulent, de unde imposibilitatea ca în practică el să fie descris ca o funcție netedă de spațiu și timp. Cu toate acestea este unanim acceptat de către comunitatea științifică din acest domeniu că un fluid turbulent are valori medii în funcție de spațiu și timp bine definite, cu caracter determinist, [16], [10]. De aceea apare ca natural faptul că în ultimul timp se preferă un calcul numeric al acestuia, așa-numit fluid medie decât a fluidului însuși, cu atât mai mult cu cât valorile de pe frontieră, la fel ca și condițiile inițiale sunt și ele mai bine aproximate în medie, evitându-se astfel erorile inerente din măsurătorile făcute.

## 2. SIMULAREA STRUCTURILOR MARI DINTR-UN FLUID TURBULENT (LARGE EDDY SIMULATION - LES)

În lumina idelor expuse anterior trebuie găsit un model matematic pentru media fluidului.

Modelele LES încearcă să descrie fluidul medie unde această medie este înțeleasă numai ca o medie spațială a fluidului real.

Derivarea aproape tuturor modelelor LES clasice (ADM, Rational LES, Smagorinsky, Leray-a) începe prin aplicarea unui operator de medie (de cele mai multe ori un operator de convoluție) ecuațiilor (1) și comutarea acestui operator cu derivatele care apar în (1). În urma aplicării acestei proceduri se va obține așa numita medie a ecuațiilor Navier-Stokes într-un domeniu mărginit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}) - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} &= \bar{\mathbf{f}} + A_\delta, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

unde

$$A_\delta(x) = \int_{\partial\Omega} g(x-s) [(\nabla \mathbf{u} - p\mathbf{I})n(s)] ds \quad (4)$$

este eroarea de comutație și  $\bar{\mathbf{u}}$  este fluidul medie (adică media vitezei fluidului) ce urmează a fi calculată.

Din punct de vedere matematic, operatorul de medie va elimina structurile din fluid mai mici decât raza  $\delta$  a fluidului și va capta numai structurile mai mari decât pe care dorim să le calculăm.

Se mai pot utiliza și alți operatori de medie însă în esență ecuațiile ce rezultă sunt aceleași.

Problemele esențiale în LES sunt:

- Care este cel mai bun filtru?

De obicei media  $\bar{u}$  a vitezei  $u$  a fluidului e dată de convoluția  $\bar{\mathbf{u}} = g_\delta * \mathbf{u}$ , unde  $g_\delta$  este un filtru cu raza  $\delta > 0$ ,

$$g_\delta(\mathbf{x}) = \left(\frac{6}{\delta^2 \pi}\right)^{d/2} e^{\left(-\frac{6}{\delta^2} \|\mathbf{x}\|_2^2\right)},$$

unde  $\|\cdot\|_2$  este norma euclidiană a lui  $x \in \mathbb{R}^d$ , iar  $\delta$  este o scală aleasă de utilizator în funcție de capacitățile computaționale existente și de rezoluția ce se dorește a fi obținută [6].

O altă metodă de definire a fluidului medie este prin filtrare cu un filtru diferențial, așa cum e descris de Germano în [9]. În domeniul mărginit  $\Omega$  dându-se o scală  $\delta > 0$  și o funcție  $\mathbf{u}(x)$ , o medie  $\bar{\mathbf{u}}$  a lui  $\mathbf{u}$ , poate fi definită ca fiind soluția problemei cu condiții la limită:

$$\begin{aligned} -\delta^2 \Delta \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}, \text{ în } \Omega \\ \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}, \text{ pe } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

Pentru a studia alți filtri folșiți în LES se poate consulta Aldama [3].

Filtri diferiți conduc la probleme diferite în analizarea modelului matematic pentru  $\bar{u}$ . De pildă, dacă este folosit filtrul gaussian, atunci apare problema specificării de condiții pe frontieră pentru  $\bar{u}$ , precum și problema modelării erorii de comutație [6].

În cazul modelelor Stolz-Adams (sau ADM, de la approximate deconvolution method) prezentate prima oară de Stolz și Adams, [1, 2], aceste probleme au fost evitate prin folosirea filtrului diferențial (5). Proprietățile matematice ale acestor modele au fost investigate în [13, 5], unde au fost demonstrate existența, unicitatea, precum și teoreme de regularitate ale soluției slabe ale acestor modele. S-a demonstrat, deasemenea că  $\|\bar{u} - w\|$  converge către 0 în condiții minimale de regularitate a fluidului, adică  $\nabla u \in L^2(0, T, L^4(\Omega))$

Totuși, în condițiile de regularitate enunțate anterior se poate arăta numai că

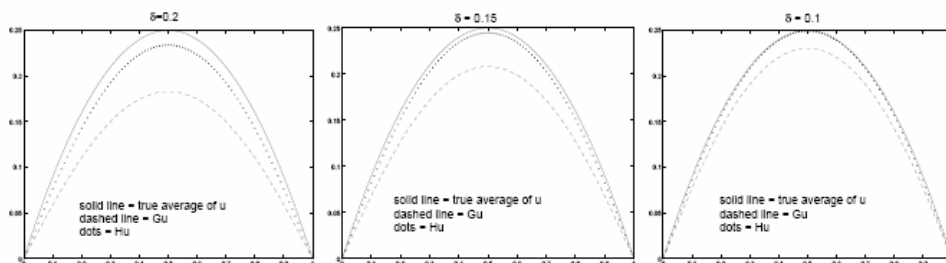
$$\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} \rightarrow 0. \tag{6}$$

Aceasta conduce la întrebarea: cât de bine aproximează media produsă de filtrul diferențial media reală a fluidului ce se dorește a fi calculată? Răspunsul este că cel puțin în câteva cazuri 1-d această aproximare nu este bună. În cele ce urmează este prezentată o nouă metodă de filtrare ce produce aproximări mai bune ale mediei exacte a unei funcții date. Fie filtrul diferențial (5). Noul filtru este definit prin  $H := 2G - G^2$  i.e

$$Hu = 2\bar{u} - \overline{u} \quad (7)$$

În cele ce urmează vom face o comparație între cei doi filtri într-un caz simplu 1-d.

Alegem  $u = x(1-x) + 0.01\sin(40\pi x)$  pe  $[0,1]$ , deci media exactă a lui  $u$  pe scala  $> 0.05$  este  $x(1-x)$ . Vom alege  $\delta = 0.2, 0.15, 0.1$  și apoi vom calcula  $Gu$  și  $Hu$  rezolvând de două ori problema cu condiții la limită (5) cu metoda diferențelor finite, cu  $\Delta x = 0.001$ . Rezultatele sunt prezentate grafic în figura (1) unde se vede pe acest caz simplu superioritatea calculării mediei cu  $H$  față de  $G$ .



**Figura 1.** Media lui  $u$  (linia solidă), media  $Gu$  (linia întreruptă) și media  $Hu$  (puncte) pentru  $\delta$  =(de la stânga la dreapta) 0.2, 0.15, 0.1. Pe ultima figură, linia solidă se suprapune punctelor.

•Cum se modelează  $\overline{uu^T}$  în funcție de  $\bar{u}$ ? O altă problemă ce apare în LES este aceea a închiderii ecuațiilor (3) prin modelarea termenului nelinier  $\overline{uu^T}$  în funcție de  $\bar{u}$ . În anumite modele LES (modelul Smagorinsky) această problemă este rezolvată pe baza unor ipoteze de natura fizică (se adaugă vâscozitatea artificială modelată numai de  $\bar{u}$ ), în altele (modelul Rational LES, [7] și modelele de deconvoluție Stolz-Adams, [5, 1, 2, 14]) problema închiderii ecuațiilor (3) a fost rezolvată prin găsirea unei aproximări matematice a termenului  $\overline{uu^T}$  în funcție de un termen ce conține numai  $\bar{u}$ .

Modelarea matematică optimală a termenului nelinier  $\overline{uu^T}$  ar trebui să ducă la un model, ce admite o soluție, care este unică și pentru care eroarea de modelare  $\|\bar{u} - w\| \rightarrow 0$  când  $\delta \rightarrow 0$ , unde  $w$  este soluția exactă a modelului LES, iar  $\bar{u}$  este media fluidului.

În opinia noastră, singurul model LES care are aceste proprietăți este modelul Stolz-Adams analizat în [14, 5], care este derivat cu ajutorul metodei de deconvoluție aproximativă (ADM), [1, 2]). Se propune utilizarea procedurii de filtrare prezentată anterior în (7) ca operator de medie și ADM ca metodă de modelare a termenului nelinier pentru a îmbunătăți modelele Stolz-Adams din punctul de vedere al ratei de convergență, după cum a fost explicat în (6).

Filtrul definit în (7) este aplicat ecuațiilor (1) și se obțin ecuațiile de medie

$$H\mathbf{u}_t - \nu\Delta \cdot H\left(\nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\right) + \nabla Hq = H\mathbf{f} \text{ în } (0,T)\times\Omega. \quad (8)$$

Folosind acum ADM pentru a modela fenomenul și înlocuind  $\mathbf{u}$  în termenul neliniar de mai sus se obține

$$\mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} + \nabla H\left(\nabla(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\right) + \nabla Hq = H\mathbf{f} \text{ în } (0,T)\times\Omega. \quad (9)$$

Într-o publicație următoare autorul intenționează să investigheze proprietățile matematice ale acestui model, precum existența, unicitatea, regularitatea soluției slabe și estimări riguroase ale erorii de modelare.

## BIBLIOGRAFIE

1. N.A. Adams, S. Stolz. *On the approximate deconvolution procedure for LES. Phys.Fluids*, II:1699-1701, 1999.
2. N.A. Adams and S. Stolz. *Deconvolution methods for subgrid-scale approximation in large-eddy simulation. Modern Simulation Strategies for Turbulent Flow*. R.T. Edwards, 2001.
3. A.A. Aldama. *Filtering Techniques for Turbulent Flow Simulation, volume 56 of Springer Lecture Notes in Eng. Springer*, Berlin, 1990.
4. J. Antaki, O. Ghattas, G. Burgreen, and B. He. *Computational flow optimization of rotary blood pump components. Artificial Organs*, 19(7):608-615, 1995
5. A. Dunca and Y. Epshteyn. *On the Stolz-Adams deconvolution models for the large eddy simulation of turbulent flows. Volume 37, Issue 6, SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2006.
6. A. Dunca, V. John, and W. Layton. *The commutation error in the space averaged Navier-Stokes equations on a bounded domain. Contributions to Current Challenges in Mathematical Fluid Dynamics, Series: Advances in Mathematical Fluid Dynamics*, G. Galdi, J. Heywood, R. Rannacher (Eds), VII, Birkhauser, pages 53-78, 2004.
7. G.P. Galdi and W.J. Layton. *Approximation of the larger eddies in fluid motion II: A model for space filtered flow. Math. Models and Meth. in Appl. Sciences*, 10(3):343 - 350, 2000.
8. B. Galperin and S. A. Orszag. *Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows*. Cambridge University Press, 1993.
9. M. Germano. *Differential filters of elliptic type. Phys. Fluids*, 29:1757-1758, 1986.
10. J. O. Hinze. *Turbulence*. McGraw Hill, 1975.
11. T. Jikuya, T. Sasaki, M. Shiono, J. Glueck, C. Smith, L. Feldman, I. Sakuma, M. Sekela, T. Noda, S. Takatani, G. Noon, Y. Nose, and E. DeBackey. *Development of an atraumatic small centrifugal blood pump for second generation cardiopulmonary bypass. Artificial Organs*, 16(6):599-606, 1992.

12. A. Kolmogorov. *The equations of turbulent motion in an incompressible fluid.* *Isv. Acad. Sci. USSR Phys.*, 6:56-58, 1942.
13. W. Layton and R. Lewandowski. *Analysis of an eddy-viscosity model for large eddy simulation of turbulent flows.* *JMFM*, 4:1-26, 2002.
14. W. Layton and R. Lewandowski. *A simple and stable Scale Similarity Model for Large Eddy Simulation: Energy Balance and Existence of Weak Solutions.* *Applied Math Letters*, 2003, to appear.
15. B. Mohammadi and O. Pironneau. *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model.* John Willey and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1994.
16. R. Temam. *Navier-Stokes Equations and nonlinear functional analysis.* SIAM, Philadelphia, 1995.

**Abstract:** This paper presents a new LES technique having a better approximation accuracy than the Differential Filters Method described in [9]. The present method can be used jointly with ADM [1, 2] to improve the Stolz-Adams' methods for turbulent flows.