EXTINDERI ALE NOTIUNII DE P-GRAF RELATIV LA GRAFURI NEORIENTATE

FLORENTINA-RODICA NICULESCU
Universitatea din Bucureşti
RADU-ŞTEFAN NICULESCU
Siemens Medical Soulutions, Malvern, PA, USA

Rezumat: Această lucrare introduce clasele de grafuri neorientate Pk şi Qk şi prezintă două generalizări pentru grafuri P. Principalele rezultate se referă la numărul minim de muchii ale acestor grafuri. De asemenea, este caracterizată densitatea acestor grafuri relativ la mulţimea tuturor grafurilor. Un rezultat similar privind densitatea este demonstrat pentru labirinturi matriciale care au proprietatea că se poate găsi o ieşire din orice poziţie dată.

Cuvinte cheie: Grafuri, conexitate, P-grafuri, labirinturi

1. INTRODUCERE

Această lucrare extinde noţiunea de P-graf [4] relativ la grafuri neorientate. Generalizarea a fost realizată în două direcţii. Astfel, au fost introduse noţiunile de P_k-graf neorientat şi cea de Q_k-graf. La început se prezintă un rezultat ce caracterizează conexitatea P_k-grafurilor, apoi o inegalitate asupra gradelor vârfurilor unui astfel de graf, inegalitate care conduce la determinarea unei margini inferioare pentru numărul de muchii ale unui P_k-graf. Se demonstrează o propoziţie ce face trecerea de la P_k-grafuri la P_{k+1}-grafuri, propoziţie care permite determinarea unei margini superioare a numărului minim de muchii pe care îl are un P_k-graf cu număr fixat de vârfuri. Acest număr este determinat efectiv pentru două tipuri particulare de astfel de P_k-grafuri.

Pornind de la două rezultate din [2], care estimează numărul grafurilor de diametru egal cu doi şi număr fixat de vârfuri şi dau o relaţie de recurenţă pentru calculul numărului grafurilor conexe cu număr fixat de vârfuri, se obţine o estimare a numărului de P_k-grafuri (şi implicit de P-grafuri, care sunt privite ca tipuri particulare de P_k-grafuri) când numărul de vârfuri tinde la infinit.

Cea de-a doua generalizare a noţiunii de P-graf se referă la Q_k-grafuri. Se prezintă o încadrare a numărului minim de muchii pe care le poate avea un Q_k-graf cu număr fixat de vârfuri, precum şi o teoremă de caracterizare a conexităţii acestor grafuri. Ultima teoremă referitoare la Q_k-grafuri dă o estimare a numărului acestora când numărul de vârfuri tinde la infinit.

Ca o completare la teoremele de estimare prezentate, sunt date câteva noţiuni despre labirinturile matriciale, se face asocierea acestor labirinturi cu grafuri neorientate şi este prezentat un rezultat asupra numărului acelor labirinturi care au proprietatea că oricum am plasa o persoană în interior, ea poate ieşi din labirint. Articolul se incheie cu un rezumat si sugestii pentru cercetari ulterioare.

2. P_k GRAFURI

Prima generalizare a notiunii de P-graf se refera la numarul de varfuri care au un nod comun:

Definiţie 1. Fie G(V,E) un graf neorientat. Spunem că k-upletul de vârfuri distincte din V(G) are proprietatea P_k dacă există un vârf *y* al grafului G, diferit de $x_1, x_2,\ldots, x_k$, cu proprietatea ca y este adiacent cu $x_1, x_2,\ldots, x_k$. Spunem că G este un P_k-graf dacă oricum am alege $x_1, x_2, ..., x_k$ vârfuri distincte ale lui G, atunci k-upletul $\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$ are proprietatea P_k. In particular, pentru *k=2*, obtinem definitia unui P-graf [4].

Observaţia 1. Pentru orice *k* şi orice *n* numere naturale, unde $n \geq k+1$, există P_k-grafuri cu *n* vârfuri şi există grafuri cu *n* vârfuri care nu sunt P_k-grafuri. Pentru a vedea acest fapt este suficient să considerăm graful complet K_n în primul caz şi un graf cu *n* vârfuri şi fără muchii în cel de-al doilea caz.

Definiţie 2. Notăm cu $a_k\left(n\right)$ numărul minim de muchii ale unui P_k-graf. În particular, pentru *k=2*, numărul minim de muchii al unui P-graf este $a\left(n\right)=a_2\left(n\right)$.

Propoziţie 1. Fie G(V,E) un P_k-graf. Atunci G este $k-1$ vârf conex.

Demonstraţie: Fie G_1 graful obţinut din G prin suprimarea a s vârfuri unde $s \leq k-2$. Fie $x_1, x_2, ..., x_s$ vârfurile suprimate. Fie *x* şi *y* două vârfuri ale lui G_1 alese arbitrar. Punem $x_{s+1} = x$ şi $x_{s+2} = y$. Alegem $x_{s+3}, ..., x_k$ diferite două câte două şi diferite de $x_1, x_2, ..., x_{s+2}$. Deoarece G este P_k-graf, k-upletul $\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$ are proprietatea P_k, deci există un vârf *z* diferit de $x_1, x_2, ..., x_k$ cu proprietatea că z este adiacent cu $x_1, x_2, ..., x_k$. Deducem de aici că *z* este vârf pentru G_1.

În concluzie între *x* şi *y* în G_1 există un lanţ format din muchiile *xz* şi *zy*. Cum *x* şi *y* sunt două vârfuri oarecare ale lui G_1, rezultă G_1 graf conex, deci G este k–1 vârf conex.

Propoziţia 2. Fie G(V,E) un P_k-graf şi *x* un vârf din V(G). Atunci $d_G\left(x\right) \geq k$.

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că $d_G(x) \geq k-1$. Fie $x_1, x_2, ..., x_s$ vârfurile adiacente cu *x*, unde $s = d_G(x)$. Punem $x_{s+1} = x$. Alegem $x_{s+2}, ..., x_k$ diferite două câte două şi diferite de $x_1, x_2, ..., x_{s+1}$. Deoarece G este P_k-graf, k-upletul $(x_1, x_2, ..., x_k)$ are proprietatea P_k, deci există un vârf *y* diferit de $x_1, x_2, ..., x_k$, cu proprietatea că *y* este adiacent cu $x_1, x_2, ..., x_k$. Implicit rezultă *y* adiacent cu *x*, ceea ce reprezintă o contradicţie, căci *x* este adiacent doar cu $x_1, x_2, ..., x_s$. În concluzie, presupunerea făcută iniţial este falsă, deci $d_G(x) \geq k$.

Corolar 1. Dacă G(V,E) este un P_k-graf cu *n* vârfuri, atunci $|E(G)| \geq \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$.

Demonstraţie: Este cunoscută relaţia: $\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2|E(G)|$.

Din Propoziţia 2 rezultă $2|E(G)| \geq nk$, ceea ce implică $|E(G)| \geq \left\lceil \frac{nk}{2} \right\rceil$.

Propoziţia 3.

a) Fie G(V,E) un P_{k+1}-graf şi *x* un vârf al său. Fie G_1 graful obţinut din G prin suprimarea vârfului *x* şi a muchiilor incidente acestuia. Atunci G_1 este un P_k-graf.

b) Fie G(V,E) un P_k-graf şi G_1 graful obţinut din G prin adăugarea unui nou vârf *x* pe care îl unim prin muchii cu toate vârfurile lui G. Atunci G_1 este un P_{k+1}-graf.

Demonstraţie:

a) Fie $x_1, x_2, ..., x_k$ vârfuri arbitrare ale lui G_1. Punem $x_{k+1} = x$. Deoarece G este P_{k+1}-graf, există un vârf *y* diferit de cele $k+1$ şi cu proprietatea că *y* este adiacent cu toate cele $k+1$ vârfuri. În particular *y* este diferit de *x*, deci $y \in V(G_1)$. Înseamnă că $(x_1, x_2, ..., x_k)$ are proprietatea P_k. Cum $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt vârfuri ale lui G_1 arbitrar alese, deducem că G_1 este un P_k-graf.

b) Fie $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ vârfuri arbitrare ale lui G_1. Deosebim două cazuri:

(i) $x \notin (x_1, x_2, ..., x_{k+1})$. În acest caz $(x_1, x_2, ..., x_{k+1})$ are proprietatea P_{k+1} deoarece *x* este adiacent cu toate cele $k+1$ vârfuri.

(ii) $x \in \{x_1, x_2, ..., x_{k+1}\}$. Putem presupune $x = x_{k+1}$. Deoarece G este P_k-graf, există un vârf *y* în G adiacent cu $x_1, x_2, ..., x_k$. Atunci, din construcţia lui G_1, *y* este adiacent şi cu *x*. Deci *y* este adiacent cu $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ şi, în concluzie, $k+1$-upletul $(x_1, x_2, ..., x_{k+1})$ are proprietatea P_{k+1}.

Din analiza cazurilor (i) şi (ii) se deduce ca $(x_1, x_2, ..., x_{k+1})$ are proprietatea P_{k+1}, deci G_1 este un P_{k+1}-graf.

Teorema 1. Pentru k şi n două numere naturale astfel încât $n \geq k+1$, are loc următoarea inegalitate: $a_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right] + 1$.

Demonstraţie: Fie G(V,E) un P_k-graf cu n vârfuri şi $a_k(n)$ muchii. Fie G_1 graful obţinut prin adăugarea unui nou vârf care se uneşte prin muchii cu toate vârfurile lui G. Conform propoziţiei 3, avem $|E(G)| = a_k(n) + n$ şi G_1 este un P_{k+1}-graf. Deoarece $a_{k+1}(n) \leq |E(G_1)|$, deducem

$a_{k+1}(n) \leq a_k(n) + n$ pentru orice k, n numere naturale cu $n \geq k+1$.

Obţinem astfel şirul de inegalităţi următor:

$$a_k(n) \leq a_{k-1}(n-1) + (n-1) \leq \ldots \leq a_2(n-(k-2)) + (n-1) + \ldots + (n-(k-2))$$

Deci

$$a_k(n) \leq (n-(k-2)) - 1 + \left[\frac{n-(k-2)}{2}\right] + n(k-2) + \frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

sau, mai concis,

$$a_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right] + 1.$$

Propozitia 4. Pentru a) $n = k+1$ sau b) $n = k+2$, în Teorema 1 avem chiar egalitate.

Demonstraţie:

a) Fie x şi y două vârfuri distincte ale unui P_k-graf G cu $n = k+1$ vârfuri. Atunci k-upletul $(x_1 = y, x_2, ..., x_k)$ are proprietatea P_k, deci există un vârf z diferit de $x_1, x_2, ..., x_k$, cu proprietatea că z este adiacent cu $x_1, x_2, ..., x_k$.

Deoarece $|V(G)| = k+1$, singura posibilitate este z = x. Deducem x şi y adiacente. Cum x şi y au fost arbitrar alese, rezultă G izomorf cu graful complet K_n care are $|E(K_n)| = \frac{(k)(k+1)}{2} = \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right] + 1$ vârfuri. Pentru a deduce egalitatea am folosit $n = k+1$.

b) Fie G un P_k-graf cu $n = k+2$ vârfuri şi $a_k(n)$ muchii. Din inegalitatea din Teorema 1 deducem $a_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right] + 1 = \frac{k^2+3k}{2} = C_{k+2}^2 - 1$.

Din ultima inegalitate rezultă că există x şi y două vârfuri distincte ale lui G astfel încât $xy \notin E(G)$.

Considerăm z un vârf diferit de x şi y. Vom arata că z este adiacent cu toate celelalte vârfuri ale lui G. Deoarece G este un P_k-graf, k-upletul $(x_1 = y, x_2, ..., x_k)$

unde x şi z nu apar în k-uplet, are proprietatea P_k, deci există un vârf u diferit de $x_1, x_2, ..., x_k$ cu proprietatea ca u este adiacent cu $x_1, x_2, ..., x_k$.

Deoarece $\left|V(G)\right| = k+2$, singurele variante ar fi $u = x$ sau $u = z$. Prima variantă nu este posibilă deoarece x şi $y = x_1$ nu sunt adiacente.

Deci $u = z$, ceea ce implică z adiacent cu toate celelalte vârfuri, mai puţin cu x. Printr-un raţionament analog se poate arăta ca z adiacent cu toate celelalte vârfuri, mai puţin cu y.

În concluzie, z este adiacent cu toate celelalte $k+1$ vârfuri. Deoarece z a fost ales arbitrar, rezultă G izomorf cu un graf care se obţine din K_n prin suprimarea unei muchii. Cum acest graf are chiar $C_{k+2}^2 - 1$ muchii, obţinem egalitate în Teorema 1.

Corolar 2. Pentru $n = k+2$ structura P_k- grafului minimal cu n vârfuri este unică.
Rezultă din demonstraţia Propoziţiei 4, punctul b).

Teorema 2. Pentru k şi n două numere naturale, astfel încât $n \geq k+1$, are loc următoarea inegalitate:

$$a_k(n) \geq \left\lceil \frac{(k+1)(n-1)}{2} \right\rceil.$$

Demonstraţie: Fie G(V,E) un P_k-graf cu n vârfuri şi $a_k(n)$ muchii iar x un vârf al său. Fie $d = d_G(x)$ şi $A_x = \{x_1, ..., x_d\}$ mulţimea vârfurilor adiacente cu x. Vom arăta că x_1 este adiacent cu cel puţin $k-1$ vârfuri din mulţimea A_x. Fie s numărul de vârfuri din A_x adiacente cu x_1. Putem presupune că x_1 este adiacent cu $x_2, ..., x_{s+1}$.

Dacă $s < k-1$, atunci, deoarece G este un P_k-graf, k-upletul $(x, x_1, x_2, ..., x_{k-1})$ (unde $x_{s+2}, ..., x_{k-1}$ sunt arbitrar alese (conform propoziţiei 2, $d \geq k$), astfel încât să fie distincte între ele şi distincte de $x_1, ..., x_{s+1}$) are proprietatea P_k. Astfel, există un vârf y adiacent cu $x, x_1, x_2, ..., x_{k-1}$. Deoarece y este adiacent cu x, implică $y \in A_x$. Deoarece y este diferit de $x_2, ..., x_{s+1}$ şi y este adiacent cu x_1, ajungem la o contradicţie.

În concluzie, presupunerea ca $s < k-1$ este falsă, deci x_1 este adiacent cu cel puţin $k-1$ vârfuri din mulţimea A_x.

Observaţia 2. În mod analog se poate arăta că oricare x_i din A_x este adiacent cu cel putin $k-1$ vârfuri din A_x.

Observaţia 3. Orice vârf din V(G)\(A_x)\{x} este adiacent cu cel puţin un vârf din A_x.

Pentru a demonstra acest fapt să considerăm $y \in$ V(G)\(A_x)\{x} şi k-upletul $(x_1, x_2, ..., x_k)$ de vârfuri distincte din V(G) cu $x = x_1$ şi $y = x_2$. Deoarece G este P_k-graf, deducem că există un vârf z diferit de $x_1, x_2, ..., x_k$, cu proprietatea că z este adiacent cu $x_1, x_2, ..., x_k$. Implicit z este adiacent şi cu $x = x_1$, deci $z \in A_x$. Vârful y este adiacent cu z deoarece $y = x_2$.

În concluzie, orice vârf din V(G)\(A_x)\{x} este adiacent cu cel puţin un vârf din A_x. Cu aceasta, observaţia este complet demonstrată.

În continuare vom folosi relaţia $\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2 \mid E(G) \mid$.

Aplicând observaţiile 2, 3 şi propoziţia 2, obţinem:

$$2|E(G)| \geq 2d + (n - d + 1) + k(n - d + 1) + (k - 1)d = (k - 1)(n + 1)$$

2d apare în momentul când numărăm muchiile dintre x şi A_x, *n- d*+1 apare când numărăm muchiile ce pleacă din A_x către V(G)\(A_x)\{x}(conform observaţiei 3), *k(n–d*+1*)* apare din faptul că orice vârf din V(G)\(A_x)\{x} are gradul cel puţin *k* (conform propoziţiei 2), iar *(k*-1*)d* apare când numărăm muchiile care pleacă din A_x tot în A_x (conform observaţiei 2). Din ultima inegalitate deducem:

$$a_k(n) \geq \left\lceil \frac{(k + 1)(n - 1)}{2} \right\rceil$$

Din cele demonstrate mai sus obţinem dubla inegalitate:

$$\left\lceil \frac{(k+1)(n-1)}{2} \right\rceil \leq a_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2} \right] + 1.$$

Corolar 3. $$a(n) = n - 1 + \left[\frac{n}{2} \right].$$

Demonstraţie: Să considerăm un graf "morişcă" (A-graf sau B-graf definit în [4]) în care un vârf (centru) este conectat cu celelalte vârfuri, iar acestea au fiecare gradul 2 (sunt conectate în perechi). În cazul când n este par, două palete ale "moriştii" au o muchie comună. Evident, un graf morişcă este un P-graf şi are $n - 1 + \left[\frac{n}{2} \right]$ muchii, ceea ce implică $a(n) \leq n - 1 + \left[\frac{n}{2} \right]$.

Conform teoremei anterioare, putem deduce următoarea inegalitate:

$$a(n) = a_2(n) \geq \left\lceil \frac{(2 + 1)(n - 1)}{2} \right\rceil = n - 1 + \left\lceil \frac{n - 1}{2} \right\rceil = n - 1 + \left[\frac{n}{2} \right].$$

Am folosit următoarea egalitate evidentă: $\lceil x \rceil = \left[x + \frac{1}{2} \right]$.

Din cele două inegalităţi deducem că $a(n) = n - 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$.

Astfel am realizat o metodă mai simplă de a afla $a(n)$ decât în [4], însă această metodă nu demonstrează şi unicitatea configuraţiei minimale, spre deosebire de rezultatul din articolul citat.

Definiţia 3. Distanţa dintre vârfurile *x* şi *y* ale unui graf neorientat şi conex G se notează *d(x,y)* şi reprezintă lungimea minimă a lanţurilor dintre *x* şi *y* în G .

Definiţia 4. Diametrul unui graf conex G reprezintă distanţa maximă între perechile de vârfuri ale lui G şi se notează prin *d(G)*.
Următorul rezultat, prezentat în [2] ne va conduce către o metodă de numărare a P_k-grafurilor cu *n* varfuri:

Teorema 3. Aproape toate grafurile neorientate cu *n* vârfuri au diametrul egal cu 2 pentru $n \to \infty$, sau dacă notăm cu $d_2(n)$ numărul grafurilor cu *n* vârfuri din mulţimea X, care au diametrul egal cu 2, avem: $\frac{d_2(n)}{2^{C_n^2}} \to 1$ când $n \to \infty$.

Demonstraţie: Vom considera mulţimea celor $2^{C_n^2}$ grafuri cu vârfurile în mulţimea
$X = \{1,...,n\}$ şi să notăm prin G_{ij} mulţimea acelor grafuri care au proprietăţile:

(i) Vârfurile *i* şi *j* nu sunt adiacente;
(ii) Pentru orice alt vârf *k*, dacă vârfurile *i* şi *k* sunt adiacente, atunci vârfurile *k* şi *j* nu sunt adiacente.

Deci, pentru orice *k* diferit de *i* şi *j*, avem trei posibilităţi de a uni prin muchii vârfurile *i*, *j* si *k* (*k* poate fi unit cu 0 vârfuri sau 1 vârf dintre *i* şi *j*). Deoarece perechile de vârfuri în care nu apar nici *x* nici *y* pot fi unite prin muchii în două moduri, rezultă $|G_{ij}| = 3^{n-2} 2^{C_{n-2}^2}$ pentru orice *i* diferit de *j*.

Mulţimea grafurilor neorientate cu mulţimea vârfurilor X şi diametrul cel putin 3 este reuniunea mulţimilor G_{ij}. Să notăm cu U_n aceasta reuniune. Obţinem:

$$|U_n| \le \sum_{i<j} |G_{ij}| = C_n^2 3^{n-2} 2^{C_{n-2}^2}$$

de unde rezultă:

$$\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \le \frac{C_n^2 3^{n-2} 2^{C_{n-2}^2}}{2^{C_n^2}} = \frac{8}{9} C_n^2 \left(\frac{3}{4}\right)^n .$$

Din ultima egalitate deducem ca $\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \to 0$ când $n \to \infty$, ceea ce este echivalent cu faptul că aproape toate grafurile cu *n* vârfuri au diametrul egal cu unu sau cu doi când $n \to \infty$. Există însă un singur graf cu diametrul egal cu unu şi anume graful complet K_n si astfel $d_2(n) = 2^{C_n^2} - |U_n| - 1$. În concluzie avem $\frac{d_2(n)}{2^{C_n^2}} \to 1$ când $n \to \infty$ sau, echivalent, aproape toate grafurile cu *n* vârfuri au diametrul egal cu doi când $n \to \infty$.

Corolar 4. Dacă notăm cu C_n numărul grafurilor conexe cu *n* vârfuri, atunci are loc:

$$\frac{C_n}{2^{C_n^2}} \to 1 \text{, când } n \to \infty$$

sau, echivalent, aproape toate grafurile cu *n* vârfuri sunt conexe, când $n \to \infty$.

Demonstraţie: Orice graf care are diametrul egal cu doi este conex. De aici, deducem inegalitatea următoare:

$$d_2(n) \le C_n .$$

Împărţind această inegalitate cu numărul grafurilor cu *n* vârfuri obţinem: $\frac{d_2(n)}{2^{C_n^2}} \le \frac{C_n}{2^{C_n^2}}$.

Deoarece numărul grafurilor conexe cu *n* vârfuri este mai mic decât numărul grafurilor cu *n* vârfuri deducem inegalitatea:

$$\frac{C_n}{2^{C_n^2}} < 1 .$$

Aplicând teorema cleştelui ultimelor două inegalităţi rezultă: $\frac{C_n}{2^{C_n^2}} \to 1$ când $n \to \infty$.

Numărul grafurilor conexe cu *n* vârfuri poate fi calculat utilizând următorul rezultat din [2]:

Propozitia 5. Numărul C_n verifică urmatoarea relaţie de recurenţă:

$$C_n = 2^{C_n^2} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} kC_n^k 2^{C_{n-k}^2} C_k \quad C_n$$

pentru $n \ge 3$ şi $C_1 = C_2 = 1$.

Demonstraţie: Este evident că, $C_1 = 1$ deoarece există un singur graf cu un vârf şi acesta este conex. De asemenea, $C_2 = 1$, deoarece există doar două grafuri conexe cu două vârfuri şi numai unul este conex şi anume acela care are o muchie.

Astfel, pentru $n \ge 3$, avem de demonstrat următoarea formulare echivalentă a recurenţei din enunţ:

$$n 2^{C_n^2} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k 2^{C_{n-k}^2} C_k .$$

Să observăm că $2^{C_n^2}$ reprezintă numărul tuturor grafurilor neorientate cu vârfurile în mulţimea $X = \{1,...,n\}$. Pentru fiecare graf neorientat putem marca un vârf oarecare în *n* moduri. Deci, $n2^{C_n^2}$ reprezintă numărul grafurilor neorientate cu mulţimea vârfurilor *X* şi cu un vârf marcat.

Să demonstrăm că şi membrul drept al formulei anterioare reprezintă acelaşi lucru. Pentru aceasta vom considera un graf G cu mulţimea vârfurilor *X* care conţine un vârf marcat. Fie *i* vârful marcat, cu $1 \le i \le n$. Vârful *i* aparţine unei componente conexe C a grafului G. Vom nota numărul de vârfuri din *C* cu *k*. Rezultă $1 \le k \le n$, iar vârfurile din *C* nu sunt legate prin nici o muchie cu varfurile din *X* \ *C*.

Vârfurile componentei *C* pot fi alese în C_n^k moduri. Vârful care este marcat îl putem alege în *k* moduri (oricare dintre vârfurile componentei C). Odată vârfurile componentei C alese, există C_k variante de a forma un graf conex cu aceste vârfuri (deoarece C este componenta conexă a lui G). Asupra vârfurilor din *X* \ *C* singura restricţie pusă este să nu fie legate prin nici o muchie cu vârfurile din C, deci ele pot forma $2^{C_{n-k}^2}$ grafuri distincte. Ţinând cont de observaţiile făcute şi de faptul că pentru $k = 1,...,n$ se obţin toate cele $n2^{C_n^2}$ grafuri neorientate cu mulţimea vârfurilor *X* şi care conţin câte un vârf marcat, deducem că are loc egalitatea de la începutul demonstraţiei, care este echivalentă cu cea din enunţul propoziţiei.

În continuare vom generaliza teorema 3 relativ la grafuri orientate. Cu toate că scopul acestui capitol este generalizarea noţiunii de P-graf relativ la grafuri neorientate, vom prezenta aici o teoremă de grafuri orientate, datorită similitudinii cu teorema 3.

Teorema 4. Aproape toate grafurile orientate cu *n* vârfuri au proprietatea că pentru oricare două vârfuri distincte *x* şi *y* există un drum de lungime unu sau doi de la *x* la *y* sau, notând cu $D_2(n)$ numărul grafurilor cu *n* vârfuri care au proprietatea anterioară, avem:

$$\frac{D_2(n)}{4^{C_n^2}} \to 1, \text{ când } n \to \infty.$$

Demonstraţie: Începem prin a observa că există $4^{C_n^2}$ grafuri cu vârfurile în mulţimea $X = \{1,...,n\}$, deoarece între oricare două vârfuri distincte *x* şi *y* putem pune zero, una sau două muchii.

Vom considera G_{ij} mulţimea acelor grafuri care au proprietăţile:

(i) Din vârful *i* nu pleacă o muchie spre vârful *j*;

(ii) Pentru orice alt vârf *k*, dacă din varful i pleacă o muchie către *k*, atunci din vârful *k* nu pleacă o muchie spre vârful *j*.

Pentru orice *k* diferit de *i* şi *j*, există 16 variante posibile de a uni prin muchii vârful *k* de vârfurile *i* şi *j*. Pentru a face parte din G_{ij}, dintre aceste variante trebuie exclusă cele descrise în (ii). Deoarece perechile de vârfuri în care nu apar nici *x* nici *y* pot fi unite prin muchii în patru moduri, rezultă $|G_{ij}| = 12^{n-2}4^{C_{n-2}^2}$ pentru orice i diferit de j.

Mulţimea grafurilor orientate cu mulţimea vârfurilor X astfel încât există două vârfuri distincte x şi y cu proprietatea că nu există drum de lungime unu sau doi de la x la y, este reuniunea mulţimilor G_{ij}. Să notăm cu V_n această reuniune. Obţinem:

$$|V_n| \leq \sum_{i \neq j} |G_{ij}| = 2C_n^2 12^{n-2}4^{C_{n-2}^2}$$

de unde rezultă:

$$\frac{|V_n|}{4^{C_n^2}} = \frac{2C_n^2 12^{n-2}4^{C_{n-2}^2}}{4^{C_n^2}} = \frac{8}{9}C_n^2\left(\frac{12}{16}\right)^n.$$

Spre deosebire de cazul grafurilor neorientate, sensul muchiilor contează. Astfel, dacă nu există un drum de la x la y, este posibil totuşi să existe un drum de la y la x. Astfel, G_{ij} şi G_{ji} sunt mulţimi diferite în cazul grafurilor orientate şi suma trebuie facută după $i \neq j$ în loc de $i < j$ (cum era în cazul grafurilor neorientate).

Din ultima egalitate deducem că $\frac{|V_n|}{4^{C_n^2}} \to 0$, când $n \to \infty$.

Deoarece $D_2(n) = 4^{C_n^2} - |V_n|$, avem $\frac{D_2(n)}{4^{C_n^2}} \to 1$, când $n \to \infty$, ceea ce este echivalent cu faptul că aproape toate grafurile orientate cu n vârfuri au proprietatea că pentru oricare vârfuri distincte x şi y există un drum de lungime cel mult doi de la x la y, când $n \to \infty$.

Definiţia 5. Notăm cu $p_k(n)$ numărul P_k-grafurilor cu n vârfuri.

Observatia 4. Este adevărat următorul şir de inegalităţi pentru orice n natural:

$$p_k(n) \leq \ldots \leq p_3(n) \leq p_2(n) \leq C_n.$$

Această inegalitate este evidentă, deoarece orice P_k-graf este în acelaşi timp şi P_{k-1}-graf, iar orice P_2-graf (P-graf) este graf conex, deoarece pentru fiecare două vârfuri distincte există un lanţ de lungime doi cu extremităţile în vârfurile respective.

Pornind de la metoda de numărare descrisă în Teorema 3 vom demonstra că aproape orice graf este P_k-graf când $n \to \infty$.

Teorema 5. Are loc: $\frac{p_k(n)}{2^{C_n^2}} \to 1$, când $n \to \infty$.

Demonstraţie: Mai întâi vom majora numărul grafurilor cu n vârfuri şi care nu sunt P_k-grafuri şi vom arată că numărul acestora raportat la numărul total de grafuri cu n vârfuri reprezintă termenul unui şir care tinde către 0.

Vom nota cu $X=\{1,...,n\}$ mulţimea vârfurilor grafurilor asupra cărora facem raţionamentul. Conform definiţiei 1, un graf G nu este P_k-graf dacă există un k-uplet$(x_1,...,x_k)$ de vârfuri distincte din V(G) care nu are proprietatea P_k, adică nu există un vârf y al grafului G, diferit de $x_1,x_2,...,x_k$, cu proprietatea că y este adiacent cu $x_1,x_2,...,x_k$.

Să notăm prin $G_{i_1 i_2 \dots i_k}$ mulţimea acelor grafuri pentru care k-upletul $(i_1,...,i_k)$ de vârfuri distincte două câte două, nu are proprietatea P_k. Pentru ca un graf să facă parte dintr-o astfel de mulţime, pentru orice vârf y diferit de $i_1,...,i_k$ avem 2^k-1 posibilităţi de a uni prin muchii vârful y de varfurile $i_1,...,i_k$ (există în total 2^k variante dintre care trebuie exclusă varianta în care y este adiacent cu toate vârfurile din mulţimea $\{i_1,...,i_k\}$). Perechile de vârfuri în care nu apare nici un vârf din mulţimea$\{i_1,...,i_k\}$ pot fi unite prin muchii în două moduri. Graful de vârfuri $i_1,...,i_k$ poate fi construit în $2^{C_k^2}$ moduri. Vârfurile diferite de $i_1,...,i_k$ formează un graf ce poate fi construit în $2^{C_{n-k}^2}$ moduri. Astfel, putem deduce următoarea formulă:

$$|G_{i_1 \dots i_k}|=2^{C_k^2}(2^k-1)^{n-k}2^{C_{n-k}^2}$$

pentru orice $i_1,...,i_k$ vârfuri din X distincte două câte două.

Mulţimea grafurilor neorientate cu mulţimea vârfurilor X şi care nu sunt P_k-grafuri este dată de reuniunea mulţimilor $G_{i_1 \dots i_k}$, unde $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$.

Să notăm cu U_n aceasta reuniune. Obţinem:

$$|U_n| \le \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |G_{i_1 \dots i_k}| = C_n^k 2^{C_k^2}(2^k-1)^{n-k}2^{C_{n-k}^2}$$

de unde rezultă:

$$\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \le \frac{C_n^k 2^{C_k^2}(2^k-1)^{n-k}2^{C_{n-k}^2}}{2^{C_n^2}} = C_n^k\left(\frac{2^k-1}{2^k}\right)^{n-k}.$$

Deoarece C_n^k reprezintă un polinom de grad k în variabila n, iar $\frac{2^k-1}{2^k}<1$, din ultima egalitate deducem că $\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \to 0$, când $n \to \infty$.

Din definiţie, $p_k(n)=2^{C_n^2}-|U_n|$.

Aşadar avem $\frac{p_k(n)}{2^{C_n^2}} \to 1$, când $n \to \infty$ sau, echivalent, aproape toate grafurile cu n vârfuri sunt P_k-grafuri, când $n \to \infty$.

Folosind această teoremă şi Observaţia 4 putem de asemenea desprinde că aproape toate grafurile cu n vârfuri sunt conexe, când $n \to \infty$.

3. Q_k GRAFURI

Dacă până acum am generalizat noţiunea de P-graf în sensul existenţei unui vârf adiacent cu alte k vârfuri, în continuare vom generaliza P-grafurile în sensul dat de definiţia următoare:

Definiţia 6. Spunem că o pereche (x, y) de vârfuri distincte ale unui graf neorientat G are proprietatea Q_k dacă există un lanţ de lungime k între x şi y, format din vârfuri distincte ale lui G. Spunem că G este un Q_k-graf dacă orice pereche (x, y) de vârfuri distincte ale lui G are proprietatea Q_k.

Se poate uşor observa că în cazul $k = 2$ atât P_k-grafurile cât şi Q_k-grafurile se confunda cu P-grafurile.

Observaţia 5. Pentru orice n şi orice k numere naturale cu $n \geq k+1$, există grafuri cu n vârfuri care sunt Q_k-grafuri şi există grafuri cu n vârfuri care nu sunt Q_k-grafuri. Este suficient să observăm că graful complet K_n este un Q_k-graf, iar graful cu n vârfuri şi fără muchii nu este un Q_k-graf.

Definiţia 7. Notăm cu $b_k(n)$ numărul minim de muchii ale unui Q_k-graf cu n vârfuri.

Vom demonstra în continuare o propoziţie prin care se face trecerea de la A-grafuri sau B-grafuri la Q_{k+2}-grafuri. Ca o consecinţă a acestei propoziţii, vom obţine o estimare a numărului minim de muchii ale unui Q_k-graf.

Propoziţia 6. Fie G(V,E) un A-graf [4] cu n vârfuri sau un B-graf [4] cu n vârfuri după cum n este număr impar sau par. Fie $\{x_1,...,x_k\}$ vârfuri astfel încât $\{x_1,...,x_k\} \not\subset \mathrm{V}(\mathrm{G})$. Construim graful G_1 care se obţine din G prin adăugarea vârfurilor $\{x_1,...,x_k\}$ pe care le unim cu vârfurile lui G în toate modurile posibile şi le unim şi între ele în toate modurile posibile. Atunci graful G_1 este un Q_{k+2}-graf cu $n+k$ vârfuri.

Demonstraţie: Să notăm cu w centrul lui G. Confrom definities din [4], centrul unui A-graf sau B-graf este un vârf adiacent cu toate celelalte vârfuri ale grafului respectiv. În cazul n=3 sau n=4 putem avea mai mult de un centru. În acest caz fixăm w ca fiind unul dintre centre. Alegem două vârfuri distincte ale lui G_1. Fie aceste vârfuri x şi y. Dorim să arătăm că între x şi y există un lanţ de lungime k + 2 format din vârfuri distincte ale lui G_1. Deosebim patru cazuri:

(i) x şi y aparţin ambele mulţimii $\{x_1,...,x_k\}$. Putem presupune $x = x_1$ şi $y = x_2$. Deoarece G este ori A-graf ori B-graf, putem alege u şi v două vârfuri ale lui G, astfel încât uvw să fie un triunghi (privit din punctul de vedere al muchiilor) în G. Atunci ca lanţ de lungime $k+2$ între x şi y poate fi considerat: $x, x_3, ..., x_k, u, v, w$. Evident vârfurile lanţului sunt distincte două câte două.

(ii) $x \in \{x_1, ..., x_k\}$, iar y este un vârf al lui G. Putem considera că $x = x_1$. Fie u şi v două vârfuri ale lui G astfel încât yuv să fie un triunghi în G (astfel de triunghi există deoarece G este A-graf sau B-graf). Atunci considerăm lanţul următor de lungime $k+2$: $x, x_2, ..., x_k, u, v, y$. Evident vârfurile lanţului sunt distincte două câte două.

(iii) x şi y sunt vârfuri distincte ale lui G, ambele diferite de w, centrul lui G. Atunci considerăm lanţul următor de lungime $k+2$: $x, x_1, ..., x_k, w, y$. Şi vârfurile acestui lanţ sunt diferite între ele.

(iv) x şi y sunt vârfuri ale lui G cu $y = w$. Atunci, deoarece graful G este ori A-graf ori B-graf, există un vârf u al lui G astfel încât xyu este triunghi în G. Atunci considerăm lanţul următor de lungime $k+2$: $x, x_1, ..., x_k, u, y$. Evident, vârfurile lanţului sunt distincte două câte două.

(v)

Din analiza acestor patru cazuri deducem că oricare pereche de vârfuri din $V(G_1)$ are proprietatea Q_{k+2}, deci putem afirma că G_1 este un Q_{k+2}-graf..

Teorema 6. Pentru k şi n două numere naturale astfel încât $n \geq k+1$, are loc următoarea inegalitate:

$$b_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right] + 1.$$

Demonstraţie: În cazul k=2 un Q_2-graf este de fapt un P-graf şi, conform teoremei de caracterizare a P-grafurilor minimale, obţinem

$$b_2(n) = n - 1 + \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{(2n-2)(2-1)}{2} + \left[\frac{n-2}{2}\right] + 1.$$

În plus, structura unui Q_2-graf cu n vârfuri şi $b_2(n)$ muchii este unică: A-graf sau B-graf. Implicit şi inegalitatea din concluzia teoremei este verificată.

În cazul k>2 să considerăm Q_2-graful minimal G cu n–(k–2) vîrfuri. Prin procedeul descris în propoziţia 6, obţinem G_1 un Q_k-graf prin adăugarea a k–2 vârfuri grafului G. Avem:

$$|E(G)| = n - (k-2) - 1 + \left[\frac{n-(k-2)}{2}\right].$$

Între cele k–2 vârfuri adăugate la G apar încă C_{k-2}^2 muchii. Între cele k–2 vârfuri adăugate la G şi vârfurile deja existente în G apar încă $(n-(k-2))(k-2)$ muchii. Astfel, numărul de muchii ale grafului G_1 este:

$$|E(G_1)| = C_{k-2}^2 + (n-(k-2))(k-2) + n-(k-2)-1+\left[\frac{n-k}{2}\right]+1.$$

Simplificând expresia rezultată, obţinem:

$$|E(G_1)| = \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right]+1.$$

Tot din propozitia 6, rezultă că G_1 este un Q_k-graf. În concluzie, $|E(G_1)| \geq b_k(n)$, fapt din care se deduce inegalitatea din concluzia teoremei.

Observaţia 6. Majorarea anterioară pentru $b_k(n)$ este bună şi pentru $a_k(n)$ după cum rezultă din teorema 1. Însă, spre deosebire de teorema 1, nu se atinge egalitate în cazul în care $n = k+1$. Pentru a demonstra acest fapt să considerăm graful G ca fiind graful cu patru vârfuri obţinut din K_5 (Figura 1) prin suprimarea unei muchii oarecare. Fie $\{x, y, u, v, w\}$ vârfurile acestui graf şi să presupunem că muchia suprimată din K_5 a fost muchia xy.

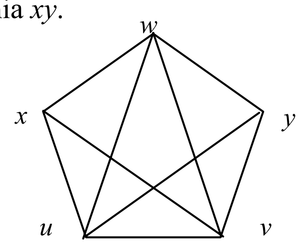

Figura 1: Graf pentru care nu se atinge egalitatea când $n = k + 1$

Astfel, perechea (u, v) are proprietatea Q_4 deoarece avem lantul v, y, w, x, u. Analog, obţinem că perechile (u, w) si (v, w) au proprietatea Q_4. Perechea (x,u) are proprietatea Q_4 deoarece există lanţul x,v, w, y, u. Analog, se arată că perechile (x, v), (x, w), (y, u), (y, v) şi (y, w) au proprietatea Q_4. Perechea (x, y) are proprietatea Q_4, deoarece există lanţul x, u, v, w, y. Deci, orice pereche de vârfuri distincte ale lui G are proprietatea Q_4, deci G este un Q_4-graf cu 9 muchii. În concluzie, $b_2(5) \leq 9$.

Din inegalitatea din teorema anterioară ar fi rezultat că

$$b_2(5) \leq \frac{(10-4)(4-1)}{2} + \left[\frac{5-4}{2}\right]+1 = 10.$$

În concluzie, nu se atinge egalitate în cazul $n = k +1$, aşa cum avea loc în cadrul Teoremei 1. Să observăm, de asemenea, că $n = 5$ şi $k = 4$ nu este caz izolat în care nu se atinge egalitatea. Pentru orice $n = k + 1$ putem considera graful obţinut din K_n prin suprimarea unei muchii şi, după un raţionament analog obţinem că nu se atinge egalitatea în teorema 6.

Propozitia 7. Orice Q_k-graf este 2 muchie conex.

Demonstraţie: Un Q_k-graf G(V,E) este graf conex deoarece pentru orice două vârfuri există un lanţ de lungime k cu extremităţile în cele două vârfuri. Fie $xy \in$

E(G) şi G_1 graful obţinut din G prin suprimarea muchiei *xy*. Fie $u,v \in V(G)$ două vârfuri unite în G printr-un lanţ L (deoarece G este conex, un astfel de lanţ există).

Deoarece G este un Q_k-graf, există în G un lanţ L_1 de lungime *k* între *x* şi *y*, format din vârfuri distincte ale lui G. Deoarece *k* este cel puţin egal cu doi, muchia *xy* nu poate aparţine lanţului L_1. Atunci înlocuind în L muchia *xy* (dacă aceasta apare) cu muchiile lanţului L_1, obţinem un lanţ între *u* şi *v* în G_1. Deducem astfel că G_1 este conex şi, cum muchia *xy* a fost aleasă arbitrar, rezultă că graful G este 2 muchie conex.

Corolar 5. Are loc inegalitatea:

$$b_2(n) \le n .$$

Demonstraţie: Fie G(V,E) un Q_k-graf oarecare. Conform definiţiei unui Q_k-graf, deducem că este imposibil să avem $|E(G)| = 0$. Fie *xy* o muchie a lui G şi G_1 graful obţinut din G prin suprimarea muchiei *xy*. Din Propoziţia 7 avem G_1 graf conex. Este cunoscut faptul că un graf conex cu *n* vârfuri are cel puţin *n*–1 muchii. De aici, deducem că

$$|E(G_1)| \ge |V(G_1)| - 1 = n - 1$$

deci

$$|E(G)| \ge n - 1 + 1 = n \text{ muchii}$$

Din definiţia lui $b_k(n)$ şi datorită faptului că G este un Q_k-graf arbitrar ales, deducem $b_2(n) \le n$.

Astfel, din rezultatele anterioare putem deduce următoarea încadrare pentru $b_k(n)$:

$$n \le b_k(n) \le \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right] + 1.$$

Definiţia 8. Notăm cu $q_k(n)$ numărul Q_k-grafurilor cu *n* vârfuri. De asemenea, să notăm cu $l_k(n)$ numărul grafurilor cu *n* vârfuri şi care nu au proprietatea Q_k.

Vom da în continuare o propoziţie care estimează numărul $l_k(n)$, propoziţie care va conduce la o teoremă ce caracterizează numărul $q_k(n)$, când $n \to \infty$.

Propoziţia 8. Fie *k* un număr natural mai mare sau egal cu doi. Atunci există un polinom R_k în variabila *n* , polinom care satisface inegalitatea următoare:

$$\frac{l_k(n)}{2^{C_n^2}} \le R_k(n)\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

pentru oricare *n* număr natural.

Demonstraţie: Să observăm mai întâi că pentru $k = 2$, Q_2-grafurile şi P_2-grafurile coincid.

În cazul k=2, în demonstraţia teoremei 5 numărul $|U_n|$ coincide cu $l_2(n)$. Am obţinut în teorema 5 următoarea estimare:

$$\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \le \frac{C_n^k 2^{C_k^2} (2^k - 1)^{n-k} 2^{C_{n-k}^2}}{2^{C_n^2}} = C_n^k \left(\frac{2^k - 1}{2^k} \right)^{n-k}.$$

Punând $k = 2$ şi înlocuind $|U_n|$ cu $l_2(n)$ obţinem:

$$\frac{l_2(n)}{2^{C_n^2}} \le C_n^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} = R_2(n) \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Am considerat $R_2(n) = \frac{16}{9} C_n^2$.

Scriind dezvoltarea pentru C_n^2, se observă că R_2 este un polinom de gradul doi în variabila n. Astfel, în cazul k =2, concluzia propozitiei 8 este adevarată.
Acest lucru ne permite o demonstraţie a propoziţiei prin inducţie asupra lui k.

Să presupunem concluzia adevarată pentru k–1, unde $k \ge 3$ şi să o demonstrăm pentru k.

Pentru un vârf x din mulţimea $X = \{1,...,n\}$ vom nota cu G_{xy} mulţimea acelor grafuri G cu $V(G) = X$, pentru care între x şi y nu există un lanţ de lungime k. Există trei cazuri:

(i) vârful x nu este adiacent cu nici unul dintre varfurile din $X \setminus \{x\}$. Atunci numărul acestor grafuri este $2^{C_{n-1}^2}$, număr care reprezintă totalitatea grafurilor G_1 pentru care $V(G_1) = X \setminus \{x\}$.

(ii) vârful x este adiacent doar cu vârful y. Numărul acestor grafuri este majorat de $2^{C_{n-1}^2}$.

(iii) vârful x este adiacent cu cel puţin un vârf z din mulţimea $X \setminus \{x, y\}$. Fie atunci G_2 graful obţinut din G prin suprimarea vârfului x şi a muchiilor incidente. Dacă G_2 ar fi un Q_{k-1}-graf, atunci între z şi y ar exista în G_2 un lanţ de lungime $k - 1$ format din vârfuri distincte două câte două, deci între x şi y ar există un lanţ de lungime k format din vârfuri distincte două câte două. Aceasta reprezintă o contradicţie cu definiţia lui G_{xy}. Deci, G_2 nu este Q_{k-1}-graf. În concluzie, dându-se vârfurile adiacente cu x, putem majora în acest caz numărul grafurilor cu $l_{k-1}(n-1)$. Însă avem $2^{n-1} - 2$ variante de a uni vârful x cu vârfurile din $X \setminus \{x\}$ astfel încât x să fie adiacent cu cel puţin un vârf din mulţimea $X \setminus \{x, y\}$.

Din analiza acestor trei cazuri, putem majora $|G_{xy}|$ astfel:

$$|G_{xy}| \le 2^{C_{n-1}^2 + 1} + (2^{n-1} - 2) l_{k-1}(n-1).$$

Deoarece fiecare graf cu n vârfuri şi care nu este Q_k-graf face parte din una din mulţimile G_{xy}, deducem ca $l_k(n) = |\bigcup_{i<j} G_{ij}|$. Cum cardinalul reuniunii este cel mult suma cardinalelor mulţimilor din reuniune, obţinem inegalitatea:

$$l_k(n) \le \sum_{1\le i<j\le n} |G_{ij}| \le C_n^2 (2^{C_{n-1}^2+1} + (2^{n-1}-2) l_{k-1}(n-1)).$$

Împărţind inegalitatea cu numărul grafurilor cu n vârfuri, rezultă:

$$\frac{l_k(n)}{2^{C_n^2}} \le C_n^2 \left(\frac{2}{2^{n-1}} + \left(\frac{2^{n-1}-2}{2^{n-1}} \right) \frac{l_{k-1}(n-1)}{2^{C_{n-1}^2}} \right) \le C_n^2 \left(\frac{2}{2^{n-1}} + R_{k-1}(n-1) \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \right).$$

În deducerea ultimei părţi a inegalităţii de mai sus am folosit faptul că

$$\frac{2^{n-1}-2}{2^{n-2}} < 1.$$

Se poate verifica uşor inegalitatea:

$$\frac{2}{2^{n-1}} \le 9 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

pentru fiecare n număr natural.

Obţinem următoarea inegalitate:

$$\frac{l_k(n)}{2^{C_n^2}} \le C_n^2 \left(9 + \frac{4}{3} R_{k-1}(n-1) \right) \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Dacă definim $R_k(n) = C_n^2 \left(9 + \frac{4}{3} R_{k-1}(n-1) \right)$, atunci se poate uşor observa că R_k este un polinom în variabila n. Pasul de inducţie este complet demonstrat.

Teorema 7. Limita raportului $\frac{q_k(n)}{2^{C_n^2}}$ este unu când $n \to \infty$, sau, echivalent, aproape orice graf cu n vârfuri are proprietatea că între oricare două vârfuri distincte există un lanţ de lungime k, format din vârfuri distincte două câte două, când $n \to \infty$.

Demonstraţie: Avem egalitatea $q_k(n) + l_k(n) = 2^{C_n^2}$ deoarece orice graf cu n vârfuri ori este Q_k-graf, ori nu este Q_k-graf. Din propoziţia 8, avem inegalitatea:

$$0 \le \frac{l_k(n)}{2^{C_n^2}} \le R_k(n) \left(\frac{3}{4} \right)^n,$$

sau, echivalent,

$$0 \le 1 - \frac{q_k(n)}{2^{C_n^2}} \le R_k(n) \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Trecând la limită când $n \to \infty$ şi aplicând criteriul cleştelui, obţinem:

$$1 - \frac{q_k(n)}{2^{C_n^2}} \to 0 .$$

În concluzie : $\frac{q_k(n)}{2^{C_n^2}} \to 1$ cand $n \to \infty$.

4. LABIRINTURI MATRICIALE

În încheierea acestui articol, ca o completare la teoremele de estimare prezentate, dăm câteva noţiuni şi un rezultat despre labirinturile matriciale.

Definiţia 5. Numim *labirint matricial* o matrice $L_{m,n}$ cu proprietatea ca $l_{ij} \in \{0,1\}$ pentru orice i între 1 şi m şi orice j între 1 şi n. Dacă $l_{ij} = 1$ numim celula (i,j) *perete*, iar dacă $l_{ij} = 0$ numim celula (i,j) *coridor*. Un exemplu de labirint matricial este prezentat în figura următoare:

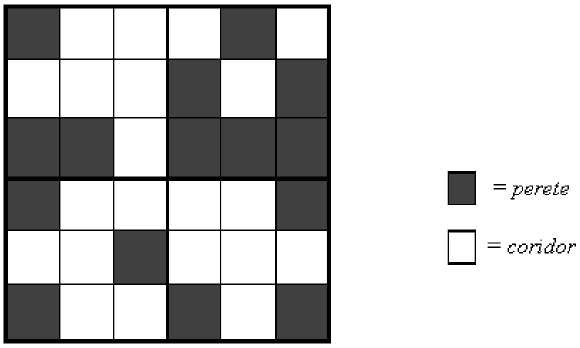

Figura 2: Labirint matricial

O persoană se poate afla la un moment doar în celulele (i,j) unde $l_{ij} = 0$. Din celula (i,j) persoana se poate deplasa doar în celulele $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i, j - 1)$ în cazul în care acestea nu sunt pereţi.

Definiţia 6. Numim graf asociat labirintului L un graf $G_L(V,E)$, unde $V = \{(i,j) \mid \text{cu}\, l_{ij} = 0\}$, iar $E = \{(i,j),(k,p) \mid (i,j),(k,p) \in V, \text{ iar } |i-k| + |j-p| = 1\}$.

Astfel, muchiile grafului asociat unui labirint sunt între două celule coridor adiacente (între care se poate deplasa cu un pas persoana).

Definiţia 7. Un labirint L este "acceptabil" dacă oricare ar fi $(i, j) \in V(G_L)$ există un lanţ în G_L cu o extremitate în (i, j), iar a doua în (k, p), unde $k \in \{1, m\}$ sau $p \in \{1, n\}$. Celulele coridor (k, p) cu $k \in \{1, m\}$, sau $p \in \{1, n\}$ corespund de fapt ieşirilor din labirint. Astfel, o definiţie echivalentă ar fi urmatoarea: un labirint este "acceptabil" dacă din oricare celulă coridor (i, j) se poate ieşi din labirint.

Ca o problemă de numărare, ne propunem să estimăm numărul labirinturilor acceptabile. Este evident, că nu orice labirint este acceptabil. Pentru a vedea acest fapt este suficient să observăm ca orice labirint L cu proprietatea $l_{ij} = 1$ pentru $i \in \{1, m\}$ sau $j \in \{1, n\}$ nu este acceptabil. Este de asemenea evident că există labirinturi acceptabile (consideram $L = 0_{mn}$). Considerăm mai întâi cazul labirinturilor matriciale pătratice. Să notăm cu $l(n)$ numărul labirinturilor matriciale acceptabile de forma L_{nn}, iar cu $L(n)$ numărul labirinturilor matriciale L_{nn}.

Observaţia 7. $L(n) = 2^{n^2}$.
Acest fapt reiese deoarece există n^2 celule în labirint, fiecare putând fi ori coridor, ori perete. Avem următorul rezultat:

Teorema 1. $\dfrac{l(n)}{L(n)} \to 0$ când $n \to \infty$.

Demonstraţie : Fie $k = \left[\dfrac{n}{3}\right]$. Împărţim labirintul în k^2 zone 3×3 şi $n^2 - 9k^2$ celule. Observăm că dacă o zonă 3×3 este de forma următoare (pătratele din colţuri pot fi coridoare sau pereţi, însă celulele adiacente colţurilor sunt pereţi, iar celula din centru este coridor), atunci labirintul nu este acceptabil.

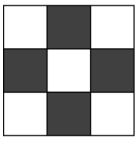

Figura 3: Configuraţie din care nu se poate ieşi din labirint.

Probabilitatea ca o zonă să fie de forma aceasta este $\dfrac{1}{32}$, deoarece există în total 2^9 variante dintre care 2^4 sunt acceptabile (putem alege colţurile ân 2^4 moduri).

În concluzie, probabilitatea ca o zonă să nu fie de forma aceasta este $\dfrac{31}{32}$, ceea ce duce la faptul că probabilitatea ca nici-o zonă să nu fie de forma aceasta este $\left(\dfrac{31}{32}\right)^{k^2}$. Înseamnă că numărul total al labirinturilor acceptabile poate fi majorat cu: $\left(\dfrac{31}{32}^{k^2}\right)L(n)$. Avem atunci următoarea inegalitate:

$$0 \leq \frac{l(n)}{L(n)} \leq \left(\frac{31}{32}\right)^{k^2}.$$

Dar $k = \left[\frac{n}{3}\right]$, deci are loc: $\left(\frac{31}{32}\right)^{k^2} \to 0$, când $n \to \infty$.

Aplicând teorema cleştelui, obţinem $\frac{l(n)}{L(n)} \to 0$, când $n \to \infty$.

5. CONCLUZII

În acest articol au fost introduse noţiunile de P_k-graf neorientat şi de Q_k-graf, două generalizări ale noţiunii de P-graf prezentată în [4]. Principalele rezultate prezintă margini asupra numărului minim de muchii pe care aceste grafuri pot să le aibă. De asemenea, este caracterizată densitatea acestor tipuri de grafuri relativ la mulţimea tuturor grafurilor. Un rezultat asemănător este demonstrat pentru labirinturile matriciale care au proprietatea că există un drum de ieşire din labirint din orice poziţie. În viitor, ne propunem să studiem generalizări ale P-grafurilor şi ale noţiunilor prezentate în articol, dar pentru grafuri orientate.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Erdos, A. Renyi, V. Sos, *On a problem of graph theory*, Studia Sci. Math., Nr. 1 (1966), 215-235.
2. Ioan Tomescu, *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucuresti, 1981.
3. Ioan Tomescu, *Introduction to combinatorics*, Collet's (Publishers) Ltd., London and Wellingborough, 1975.
4. R.S.Niculescu, M.F.Niculescu, *A problem of minimum in grapf theory*, Sudii şi Cercetări Matematice, Vol.2(52), No.3(2000), 337-343.
5. J.A. Bondy, *Counting subgraphs. A new approach to the Caccetta-Haggkvist conjencture*, Discrete Mathematics 165/166 (1997) 71-80.
6. L. Lovasz, *Combinatorial problems and exercises*, Akademiai Kiado, Budapest, 1979.
7. Claude Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
8. Claude Berge, *Teoria grafurilor şi aplicaţiile ei*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

Abstract : In this paper we introduce undirected Pk-graphs and undirected Qk-graphs, two generalizations of P-grahs. The main results of this research describe the minimum number of edges of such graphs. We also characterize the density of such graphs relative to the entire set of graphs. A similar density result is proved for matrix labirinths which have a the property that one can find an exit path from any given position.