VALORI MEDII ALE UNEI VARIABILE ALEATOARE DIN PLANUL EUCLIDIAN E_2

RODICA TRANDAFIR
Universitatea Spiru Haret

Rezumat: *În această lucrare se calculează valorile medii ale unor variabile aleatoare ataşate unor familii de figuri convexe din planul euclidian* E_2.

Cuvinte cheie: figuri convexe, valori medii

Fie E_2 planul euclidian de coordonate carteziene ortogonale *x,y*. Grupul de mişcări din acest plan este grupul G_3 al transformărilor ortogonale definit de operatorii

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, X_3 f = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}; \qquad (1)$$

cu structura:

$$\left(X_1, X_2\right) = 0, \left(X_1, X_3\right) = X_2, \left(X_2, X_3\right) = -X_1.$$

În [4] am considerat o familie de varietăţi $\mathcal{F}_1$ cu doi parametrii din E_2 de ecuaţie

$$F\left(x, y, \alpha, \beta\right) = 0$$

şi am notat prin $G_r\left(x\right) \subseteq G_3$ grupul maxim invarianţă a familiei şi $H_r\left(\alpha, \beta\right)$ grupul ataşat lui.

În legătură cu $H_r\left(\alpha, \beta\right)$ se poate arăta că [4] formează un grup izomorf cu grupul G_r de invarianţă a familiei de varietăţi.

Familia $\mathcal{F}_2$ de curbe este măsurabilă dacă grupul H_r este măsurabil, deci în particular el trebuie să fie tranzitiv. Rezultă că $2 \le r \le 3$.

Dacă $r = 2$ rezultă că grupul maxim de invarianţă al familiei este un subgrup cu doi parametrii ai grupului (1), deci este un grup abelian

$$G_2 \equiv \left[X_1, X_2\right].$$

În [4] se arată că singurele familii cu doi parametri de curbe măsurabile din planul euclidian sunt familiile de drepte din plan şi familiile de curbe:

$$F\left(x-\alpha, y-\beta\right)=0 \tag{2}$$

şi au măsura

$$\mu\left(Q\right)=\iint\limits_{Q_{\alpha}} d\alpha d\beta\,. \tag{3}$$

Să considerăm planul euclidian E_2 în care măsura elementară a mulţimii dreptelor din plan este

$$dG=[dpd\varphi] \tag{4}$$

unde p şi φ sunt coordonatele normale ale duplei G, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ si $0\le p\le l\cos\varphi$.

Fie o figură convexă K_0 fixă şi $\{K_1,...,K_m\}$ un sistem de m figuri convexe aleatoare ca poziţie, independente, uniform repartizate, congruente cu o figură convexă K şi care intersectează K_0.

Notăm prin $K_m=K_0\cap(K_1\cap...\cap K_m)$ figura obţinută ca intersecţie a lui K_0 cu cele m corpuri $K_1,...,K_m$. Dacă l_m este lungimea lui K_m, l_m este o variabilă aleatoare. În [2] s-a determinat valoarea medie a variabilei aleatoare l_m şi anume:

$$E[l_m]=\frac{2^m}{[2\pi(b_0+b)+L_0L]^m}\int\limits_{(G\cap K_0\neq\emptyset)}(\pi S+L\lambda)^m\,dG \tag{5}$$

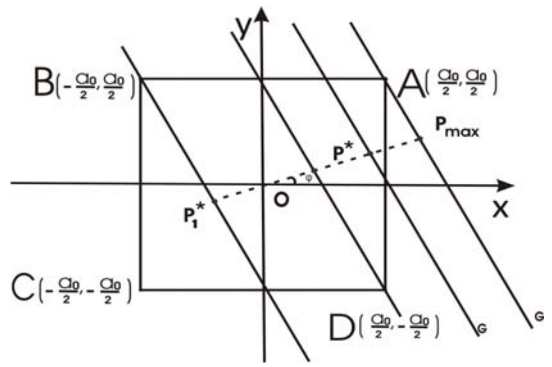
unde S_0 este aria lui K_0, L_0 lungimea sa, S şi L aria respectiv lungimea figurii convexe K, iar λ este lungimea corzii determinate pe o dreaptă oarecare din plan prin intersecţia cu K_0.

Vom determina $E[l_m]$ în cazul în care K_0 este un pătrat de latură a_0, iar K un dreptunghi de laturi *a,b* sau o bandă infinită de lăţime *a*.

Pentru calcularea valorii $E[l_m]$ trebuie să determinăm valoarea integralei

$$I_n=\int\limits_{(G\cap K_0\neq\emptyset)}\lambda^m dG \tag{6}$$

Considerăm pătratul K_0 cu centrul în origine şi cu laturile paralele cu axele de coordonate



Împărţind intervalul $[0,2\pi]$ în intervalele $\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],...,\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ şi notăm distanţa de la origine la dreapta ce trece prin vârful A cu

$$p_{\max}=\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi),0\le\varphi\le\frac{\pi}{4} \tag{7}$$

şi

$$p^*=\frac{a_0}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi),\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}. \tag{8}$$

dacă *G* trece prin vârful *D*.

Avem

$$\lambda=\begin{cases}\dfrac{a_0}{\cos\varphi},0\le p\le\dfrac{a_0}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)\\ \dfrac{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)-p}{\sin\varphi\cos\varphi},\dfrac{a_0}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)\le p\le\dfrac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)\end{cases} \tag{9}$$

Împărţind intervalul$[0,2\pi]$ în intervalele $\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],...,\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ avem:

$$I_{n\left[0,\frac{\pi}{4}\right]}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\left[\int_0^{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)}\frac{a_0^n}{\cos^n\varphi}dp+\int_{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)}^{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)}\left(\frac{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)-p}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)^n dp\right]= \tag{10}$$

$$=\frac{a_0^{n+2}}{2(n+2)}\left[1-2^{\frac{n-1}{2}}(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}\right]$$

Notând cu $V(n)=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}$, rezultă că $I_{n\left[0,\frac{\pi}{4}\right]}=\frac{a_0^{n+2}}{2(n+2)}\left[1-2^{\frac{n-1}{2}}V(n)\right]$.

Să luăm o altă poziţie a dreptei G şi anume, să considerăm că G trece prin vârful B, iar p_1^* este distanţa de la origine la G în acest caz

Avem că $p_1^*=\frac{a_0}{2}(-\cos\varphi+\sin\varphi)$ şi

$$\lambda=\begin{cases}\dfrac{a_0}{\sin\varphi}, 0\le p\le\dfrac{a_0}{2}(-\cos\varphi+\sin\varphi)\\[2ex] \dfrac{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}, \dfrac{a_0}{2}(-\cos\varphi+\sin\varphi)\le p\le\dfrac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)\end{cases} \tag{11}$$

Avem:

$$I_{n\left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left[\int_0^{\frac{a_0}{2}(-\cos\varphi+\sin\varphi)}\frac{a_0^n}{\sin^n\varphi}dp+\int_{\frac{a_0}{2}(-\cos\varphi+\sin\varphi)}^{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)}\left(\frac{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)-p}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)^n dp\right]=I_{n\left[0,\frac{\pi}{4}\right]}, \tag{12}$$

deci $I_{n\left[0,\frac{\pi}{4}\right]}=I_{n\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]}=\ldots=I_{n\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]}$.

Avem deci :

$$I_n=\frac{4a_0^{n+1}}{n+1}\left[1-2^{\frac{n-1}{2}}V(n)\right], \tag{13}$$

dar

$$E[l_m]=\frac{2^m}{[2\pi(S+S_0)+L_0L]^m}\int_{(G\cap K_0\neq\emptyset)}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(\pi S)^{m-k}L^k\lambda^k dG\,. \tag{14}$$

Dacă K este un dreptunghi de laturi a, b avem:

$$E[l_m]=\frac{4a_0}{\left[1+\frac{a_0^2}{ab}+4\frac{a_0}{\pi}\left(\frac{a+b}{ab}\right)\right]^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{2a_0}{\pi}\right)^k\left(\frac{a+b}{ab}\right)^k\frac{1-2^{\frac{k-1}{2}}+V(k)}{k+1}, \tag{15}$$

iar pentru $a=b$ avem:

$$E[l_m]=\frac{4a_0}{\left[1+\frac{a_0^2}{a^2}+\frac{8}{\pi}\frac{a_0}{a}\right]^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{4}{\pi}\frac{a_0}{a}\right)^k\frac{1}{k+1}\left[1-2^{\frac{k-1}{2}}+V(k)\right]. \tag{16}$$

Dacă K este o bandă infinită de lăţime a făcând $b\to\infty$ rezultă:

$$E[l_m]=\frac{4a_0}{\left[1+\frac{4a_0}{a}\right]^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1-2^{\frac{k-1}{2}}+V(k)}{k+1}\left(\frac{4a_0}{\pi a}\right)^k. \tag{17}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Deltheil, R., *Probabilités géometriques*. Gauthier-Villars, 1926.
2. Stoka, M., *Les espérances mathématiques de quelques variables alèatoires associées á des figures convexes dans des espaces euclidiens*. Rend. Circ. Matem. di Palermo, 1973.
3. Stoka, M., *Geometrie integrală*, Ed. Academiei Române, 1967
4. Trandafir, R., *Familles des courbes mesurables du plan euclidien*, Rev. Roum. De Math. Pures et Appl., Ed. Academiei Române, 1966.
5. Trandafir, R., *Les espérances mathématiques et les variances de quelques variables alèatoires associées á des familles d`orales*. Bull. De la Classe des Sciences. Acad. Royale de Belgique, 1974.

Abstract: This paper presents computing results concerning the mean value of random variables associated to some families of convex shapes belonging to the Euclidian space E_2.