INVARIANȚI ŞI S-INVARIANȚI ÎNTR-O PT- REȚEA PETRI MARCATĂ

MARIN POPA
Universitatea Spiru Haret, Facultatea de Matematică-Informatică,
marpopa2002@yahoo.com

MARIANA POPA
Universitatea Spiru Haret, Facultatea de Matematică-Informatică,
marpopa2002@yahoo.com

Rezumat: Articolul prezent stabileşte o serie de proprietăți legate de invarianții şi S-invarianții unei rețele Petri marcate, aşa cum ar fi: o caracterizare structurală a invarianților unei PT- rețele Petri marcate şi $\{0,1\}$-valuate prin intermediul relației de flux a rețelei, o caracterizare structurală a invarianților rețelei prin operatorul de incidență al acesteia, o caracterizare a S-invarianților unei rețele Petri viabile, o condiție suficientă de mărginire a unei rețele Petri acoperită prin S-invarianți, etc. Articolul se încheie prin prezentarea unei modalități concrete de studiere a proprietăților unui sistem prin intermediul S-invarianților rețelei Petri care modelează acel sistem.

Cuvinte cheie: rețea Petri marcată, invariant, S-invariant, viabilitate, mărginire.

1. **INTRODUCERE**

Teoria rețelelor este un capitol special al teoriei generale a sistemelor dezvoltat ca un instrument al analistului de sisteme care să îi permită acestuia reprezentarea şi cercetarea sistemelor la orice nivel de detaliere necesar.

Printre altele, teoria rețelelor este folosită pentru a descrie şi analiza sistemele de operare ale calculatoarelor, funcțiile hardware ale acestora şi algoritmii cu un înalt nivel de concurență.

În general, sistemele sunt considerate ca mulțimi de subsisteme interconectate care sunt mai totdeauna constrânse să funcționeze în paralel, fie pentru creşterea siguranței în funcționare a sistemelor, fie din necesitatea de a conecta subsisteme situate la distanțe diferite.

Au apărut astfel probleme intrinseci paralelismului cum ar fi: problema coaliției, problema sincronizării, problema blocării, problema comunicării etc, probleme care se pun şi se studiază încă din faza de proiectare a sistemelor. Este deci necesar să ştim a modela şi exprima proprietățile sistemelor pe care dorim să le avem în vedere în evoluția viitoare a acestora.

Analele Universității SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

Problemele paralelismului şi modelarea acestora au făcut obiectul numeroaselor lucrări ştiinţifice care pe plan teoretic clarifică noţiunile de: timp real, paralelism, comunicare, sincronizare, arhitectură distribuită etc.

În 1962, Carol Adam Petri dezvoltă o teorie matematică adecvată studierii sistemelor de procesare (prelucrare) a informaţiei bazată pe comunicare, sincronizare, paralelism şi concurenţă. Modelul formal propus de Petri poartă astăzi denumirea de reţea Petri.

Reţelele Petri devin celebre prin lucrările cercetătorilor americani din anii '70 ai secolului XX, care extind şi aplică ideile lui Petri în multe domenii ale ştiinţei, în general, şi al ştiinţei calculatoarelor, în particular.

Reţelele Petri au fost folosite în studiul unei mari varietăţi de sisteme, cum ar fi: sisteme de operare ale calculatoarelor, verificarea formală a proceselor paralele, controlul proceselor industriale, corelarea structurilor matematice, sisteme hardware, sisteme software, sisteme de legislaţie, sisteme chimice, limbaje formale, verificarea protocoalelor din reţelele de calculatoare, sisteme informatice, scheme PERT şi altele.

Au apărut astfel diferite tipuri de reţele Petri, de la cele mai simple, cum ar fi: maşini de stări, reţele liber alese, grafuri de evenimente, reţele simple, etc. până la cele mai complexe: reţele Petri colorate, reţele Petri predicat-tranziţie, reţele Petri algebrice, reţele Petri stochastice etc. Ele au fost grupate în clase sub forma:

- PT-reţele (reţele Petri locaţie-tranziţie);
- CE-reţele (reţele Petri condiţie-eveniment);
- TP reţele (reţele Petri test);
- HL-reţele sau CP-retele (reţele Petri colorate);
- PrT-reţele (reţele Petri predicat-tranziţie);
- SPN-reţele (reţele Petri stochastice);
- FPN-reţele (reţele Petri fuzzy).

Clasa PT-reţelelor conţine: maşini de stări, grafuri de evenimente, reţele liber alese (cu alegere liberă), reţele Petri simple, precum şi extensii ale acestora printre care :reţele Petri cu inhibiţie, reţele Petri cu priorităţi, reţele Petri temporizate, reţele Petri cu resetare, reţele Petri cu automodificare, reţele Petri sub strategie de maxim, reţele Petri controlate prin cozi sau prin automate, reţele Petri condiţionate, reţele Petri selective, reţele Petri cu revenire şi altele.

Principiile care iniţial au stat la baza modelării sistemelor prin reţele Petri sunt:

1. stările şi tranziţiile dintre stările unui sistem sunt entităţi distribuite;
2. stările şi tranziţiile sunt entităţi distincte, dar în strânsă corelaţie;
3. o tranziţie se poate produce numai dacă sunt indeplinite anumite condiţii fixate apriori şi care nu depind de starea curentă a sistemului;
4. rezultatul producerii unei tranziţii este presupus a fi totdeauna acelaşi.

Au apărut, însă, sisteme care nu puteau fi modelate satisfăcător, datorită restricţiilor impuse în principiul 3, dar acceptând ideea variabilităţii precondiţiilor producerii tranziţiilor, au apărut noi clase de reţele Petri, precum: reţele Petri cu inhibiţie, reţele Petri cu priorităţi, reţele Petri controlate prin automate, reţele Petri cu automodificare, reţele Petri condiţionate, reţele Petri selective etc.În aceste subclase, o tranziţie se poate produce sau nu în aceleaşi condiţii, în funcţie de istoricul evoluţiei sistemului.

Pentru ca prin modelare să obţinem un model cât mai fidel sistemului modelat, este necesară mai întâi observarea sistemului. Sistemele reale au o evoluţie continuă în timp, iar din punct de vedere practic observarea este discretă, întrucât nu se poate face decât la anumite momente de timp. Este posibil, deci, ca anumite acţiuni ale sistemului să nu poata fi observate şi observatorul să înregistreze o nouă stare a sistemului, fără a şti ce acţiune a produs-o. În astfel de situaţii, putem considera că sistemul a efectuat un salt spontan dintr-o stare în alta. Reţelele Petri cu revenire modelează sistemele în astfel de situaţii.

In cele ce urmează vom folosi definiţiile noţiunilor preliminare şi notaţiile introduse în [1, 2, 3].

2. **ASPECTE TEORETICE**

Definiţia 1. *Fie* $\Sigma_M = (S, T, Pre, Post, \mu_0)$ *o PT-reţea Petri marcată {0,1}-valuată. Vom spune că* $A \subseteq S$ *este invariant al reţelei* Σ_M $\Leftrightarrow$*pentru orice* $\mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$ *avem* $\mu(A) = \mu_0(A)$*, adică dacă în întreaga evoluţie a reţelei numărul mărcilor conţinute în locaţiile din A rămâne invariant la producerea oricărei tranziţii a reţelei.*

Teorema 1 *(de caracterizare structurală a invarianţilor). Fie* Σ_M *o PT-reţea Petri marcată {0,1}-valuată şi* $A \subseteq S$*.*
Fie $F_A = \{(s,t) \in A \times T / Pre(s,t) = 1\} \cup \{(t,s) \in T \times A / Post(s,t) = 1\}$*,*
mulţimea tuturor arcelor care au o extremitate în A. Atunci A este invariant pentru Σ_M $\Leftrightarrow$

a) $\forall (s,t) \in F_A$ $\exists! s' \in A$ *astfel încât* $(t, s') \in F_A$

b) $\forall (s,t) \in F_A$ $\exists! s' \in A$ *astfel încât* $(s', t) \in F_A$

(aceste relaţii spun că pentru fiecare arc al digrafului asociat lui Σ_M *cu o extremitate în A ce porneşte sau se sfârşeşte într-o tranziţie t oarecare a reţelei există un singur arc cu o extremitate în A ce sfârşeşte respectiv porneşte din t)*

Demonstraţie

"$\Rightarrow$" a) Fie $\forall (s,t) \in F_A$. Dacă pentru $\forall s' \in A$ arcul $(t, s') \notin F_A$ atunci la producerea tranziţiei t permisă la marcarea $\mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$, A pierde o marcă şi deci $\mu(A) \neq \mu_0(A)$.

Dacă $\left|\{s' \in A / (t, s') \in F_A\}\right| \geq 2$ atunci prin producerea tranziţiei t permisă de μ, A va primi un număr de mărci ≥ 2 şi va pierde doar o marcă pe arcul $(s,t) \in F_A$ şi astfel $\mu(A) \neq \mu_0(A)$. Rezultă deci că $\exists! s' \in A$ a. î. $(t, s') \in F_A$

b) Ca şi mai sus, dacă pentru $(t,s) \in F_A$ nu ar exista nici un arc $(s', t) \in F_A$ cu $s' \in A$ atunci prin producerea tranziţiei t permisă la o anumită marcare μ accesibilă din marcarea iniţială μ_0, A va primi o marcă în plus iar dacă ar exista două sau mai multe arce $(s', t) \in F_A$ cu $s' \in A$ atunci prin producerea tranziţiei t, A va pierde cel puţin două mărci şi va primi doar o marcă ceea ce spune că după producerea lui t numărul mărcilor lui A este mai mic decât cel existent anterior producerii lui t, adică $\mu(A) \neq \mu_0(A)$.

"$\Leftarrow$" Reciproca rezultă din condiţiile a) şi b) în care pentru $\forall s \in A$ şi pentru $\forall (t,s) \in F_A$ există un singur $s' \in A$ astfel încât $(s', t) \in F_A$. Analog rezultă că pentru orice s din A şi pentru orice (s,t) din F_A există un singur s' din A astfel încât (t,s') să fie în F_A. Deci prin producerea tranziţiei t permisă la o anumită marcare μ accesibilă din marcarea iniţială μ_0, o marcă va fi transferată prin cele două arce incidente lui t de la s' la s în primul caz, sau de la s la s' în cel de-al doilea caz şi astfel după producerea tranziţiei t numărul mărcilor lui A rămâne neschimbat. Evident că prin producerea oricărei tranziţii ce nu aparţine cel puţin unui element din F_A numărul mărcilor lui A nu este afectat şi deci $\forall \mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$, $\mu(A) = \mu_0(A)$.

Corolar 1. *Dacă* Σ_M *este {0,1}- valuată şi* $A \subseteq S$ *iar* F_A *este mulţimea arcelor cu o extremitate în A atunci pentru orice* $t \in T$ *astfel încât* $\exists s \in A$ *cu* $(s,t) \in F_A$ *sau* $(t,s) \in F_A$*, avem: numărul arcelor din* F_A *care sfârşesc în t este egal cu numărul arcelor din* F_A *care pornesc din t.*

Demonstraţie. Este o consecinţă imediată a punctelor a) şi b) din teorema 1.

Corolar 2. *Dacă* Σ_M *este o PT-reţea Petri marcată {0,1}- valuată iar* $A \subseteq S$ *este un invariant al lui* Σ_M *atunci* $A^* = {}^*A$.

Demonstraţie

Presupunem că $\exists t \in A^* \setminus {}^*A \Rightarrow t \in A^*$ şi $t \notin {}^*A$ rezultă că există $s \in A$ astfel încât $(s,t) \in F_A$ şi $\forall s' \in A$, $(t,s') \notin F_A$ ceea ce contrazice punctul a) din teorema 1; deci $A^* \setminus {}^*A$ este mulţimea vidă şi astfel $A^* \subseteq {}^*A$.

Presupunem că $\exists t \in {}^*A \setminus A^* \Rightarrow t \in {}^*A$ şi $t \notin A^*$ $\Rightarrow$ există $s \in A$ astfel încât $(t,s) \in F_A$ şi $\forall s' \in A$, $(s',t) \notin F_A$ ceea ce contrazice punctul b) din teoremă; deci ${}^*A \setminus A^* = \emptyset \Rightarrow {}^*A \subseteq A^*$.

Din cele două relaţii rezultă că $A^* = {}^*A$.

Exemplul 1. Fie Σ_M o PT-reţea Petri marcată {0,1} valuată dată în fig.1

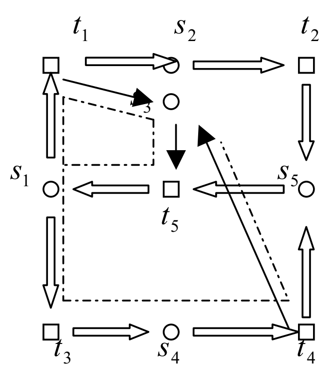

Fig.1 Invarianţi într-o PT- reţea {0,1}valuată

Se observă că submulţimile de locaţii: $S_1 = \{s_1, s_3, s_4\}$ şi $S_2 = \{s_1, s_2, s_4 s_5\}$ sunt invarianţi ai lui Σ_M deoarece mulţimile de arce :

$$F_{S_1} = \{(s_1,t_1),(s_1,t_3),(t_5,s_1),(t_1,s_2),(s_2,t_2),(t_2,s_5),(t_4,s_5),(s_5,t_5),$$
$$(t_3,s_4),(s_4,t_4)\}$$

şi $F_{S_2} = \{(s_1,t_1),(s_1,t_3),(t_5,s_1),(t_1,s_3),(t_4,s_3),(s_3,t_5),(t_5,s_4),(s_4,t_4)\}$

îndeplinesc condiţiile din teorema de caracterizare.

Analele Universităţii SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

Observația 1. *Teorema 1 nu este valabilă şi pentru PT-rețele ce nu sunt {0,1}-valuate*, după cum se vede în fig. 2 în care dacă $\mu_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ prin producerea oricăreia din cele 4 tranziții ale rețelei numărul de mărci de pe locațiile rețelei este constant, adică $\mu(S) = \mu_0(S)$, pentru orice $\mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$. Cu toate acestea arcului $(s_2, t_4) \in F_S$ nu îi corespunde un singur arc din F_S, ci două: (t_4, s_1) şi (t_4, s_3). Analog arcului $(t_2, s_2) \in F_S$ îi corespund arcele (s_1, t_2) şi (s_3, t_2).

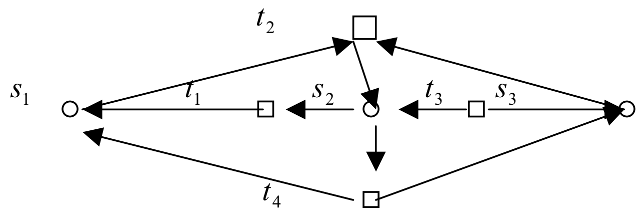

Fig.2 S este invariant

Teorema 2. *Fie* $\Sigma_M = (S, T, \Pr e, Post, \mu_0)$ *o PT-rețea Petri marcată,* $A \subseteq S$ *o mulțime de locații şi* $C_A \in \{0,1\}^{|S|}$ *vectorul caracteristic al lui A dat prin* $C_A(s) = if\ \ s \in A\ \ then\ \ 1\ \ else\ \ 0.$

Atunci A este invariant $\Leftrightarrow \Delta^t C_A = 0$.

Demonstrație

"$\Rightarrow$" A invariant $\Leftrightarrow$ numărul mărcilor lui A nu se schimbă la producerea oricărei tranziții $t \in T$ permisă la o anumită marcare a rețelei accesibilă din marcarea inițială. Aceasta înseamnă că numărul total al mărcilor pe care le acumulează A prin producerea lui $t \in T$ este egală cu numărul total al mărcilor pe care le pierde prin producerea lui t, ceea ce se formalizează prin

$$\sum_{s \in t^* \cap A} Post(s,t) \Leftrightarrow \sum_{s \in ({}^*t \setminus t^*) \cap A} \Pr e(s,t) + \sum_{s \in ({}^*t \cap t^*) \cap A} \Pr e(s,t) =$$

$$\sum_{s \in (t^* \setminus {}^*t) \cap A} Post(s,t) + \sum_{s \in (t^* \cap {}^*t) \cap A} Post(s,t) \Leftrightarrow \sum_{s \in (t^* \setminus {}^*t) \cap A} Post(s,t) - \sum_{s \in ({}^*t \setminus t^*) \cap A} \Pr e(s,t) +$$

$$\sum_{s \in (t^* \cap {}^*t) \cap A} (Post(s,t) - \Pr e(s,t)) = 0$$

Folosind acum definiția operatorului de incidență $\Delta : S \times T \to Z$ dat prin:

$$\Delta(s,t) = \begin{Bmatrix} Post(s,t), s \in t^* \setminus {}^*t \\ -\Pr e(s,t), s \in {}^*t \setminus t^* \\ Post(s,t) - \Pr e(s,t), s \in {}^*t \cap t^* \\ o, altfel \end{Bmatrix}$$

avem

$$\sum_{s\in(t^*\setminus{}^*t)\cap A}\Delta(s,t)+\sum_{s\in({}^*t\setminus t^*)\cap A}\Delta(s,t)+\sum_{s\in({}^*t\cap t^*)\cap A}\Delta(s,t)=0\Leftrightarrow$$
$$\sum_{s\in(t^*\cup{}^*t)\cap A}\Delta(s,t)=0\Leftrightarrow\sum_{s\in{}^*t^*\cap A}\Delta(s,t)=0$$

Observăm acum că pentru $s\in A$ şi s nu se află printre vecinii lui t, prin producerea tranziţiei t numărul mărcilor locaţiei s nu se modifică şi deci ultima relaţie este echivalentă cu $\sum_{s\in A}\Delta(s,t)=0$.

Folosind vectorul caracteristic al lui A, relaţia de mai sus se scrie
$$\sum_{s\in S}\Delta(s,t)\cdot C_A(s)=0\Leftrightarrow\Delta(\cdot,t)C_A=0.$$
Deoarece tranziţia t este arbitrară observăm că $\Delta(\cdot,t)C_A=0$ pentru $\forall t\in T$, relaţie care este echivalentă cu $\Delta^t\cdot C_A=0$.

"$\Leftarrow$" Reciproc, dacă pentru vectorul caracteristic C_A al unei mulţimi de locaţii $A\subseteq S$ avem $\Delta^t\cdot C_A=0$ rezultă, mergând cu implicaţiile în sens invers, că

$$\sum_{s\in{}^*t\cap A}\mathrm{Pre}(s,t)=\sum_{s\in t^*\cap A}Post(s,t),\ \forall t\in T,$$
relaţie care spune că A este un invariant al lui Σ_M.

Rezultatul de mai sus arată că orice invariant al reţelei se obţine rezolvând în Z ecuaţia $\Delta^t\cdot x=0$. Nu orice soluţie a acestei ecuaţii este invariant al reţelei, cum ar fi spre exemplu soluţiile ecuaţiei ce nu sunt vectori caracteristici ai unor submulţimi din S.

Vom extinde mai departe noţiunea de invariant introdusă mai sus.

Definiţia 2. *Fie Σ o PT-reţea Petri. Se numeşte S-invariant al lui Σ orice vector $i:S\to Z$ pentru care $\Delta^t\cdot i=0$.*

Conform Teoremei 2 vectorul caracteristic al oricărui invariant al reţelei este un S-invariant, dar nu orice S-invariant este vectorul caracteristic al unui invariant.

Exemplul 2. Fie Σ reţeaua Petri din fig.1. Observăm că operatori Pre, Post şi Δ sunt următorii:

$$\mathrm{Pre}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad Post=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rezolvând ecuaţia $\Delta^t \cdot i = 0$ prin una din metodele cunoscute din algebra liniară de rezolvare a sistemelor liniare în numere întregi, cum ar fi spre exemplu algoritmul ciclic sau algoritmul discret al lui Gomory bazaţi pe principiul introducerii unor restricţii suplimentare numite tăieturi, se obţin 4 S-invarianţi, cei din fig.3, dintre care numai 2 sunt vectori caracteristici corespunzând invarianţilor S_1 şi S_2 din exemplul 5.

	i_1	i_2	i_3	i_4
s_1	1	1	2	0
s_2	0	1	1	1
s_3	1	0	1	-1
s_4	1	1	2	0
s_5	0	1	1	1

Fig.3 S-invarianţii reţelei din fig.1

Observăm că invarianţii i_3 şi i_4 sunt combinaţii liniare a celor doi vectori caracteristici. Spre exemplu $i_3 = i_1 + i_2$ iar $i_4 = i_2 - i_1$. Fiecare dintre cei doi S-invarianţi i_3 şi i_4 admit anumite interpretari în reţea.

Urmărind reţeaua din fig.1 observăm că la producerea lui t_1 un punct din s_1 este transferat atât în s_2 cât şi în s_3, de unde putem considera că un punct din s_1 se numără cât unul din s_2 şi unul din s_3 la un loc. Analog, când se produce t_4 o marcă din s_4 este transferată atât în s_3 cât şi în s_5 şi deci o marcă din s_4 se numără cât una din s_3 şi una din s_5 laolaltă. Deci mărcile din s_1 şi s_4 au o pondere dublă decât a celor din s_2, s_3 şi s_5. Introducând o astfel de pondere pe locaţiile reţelei, prin S-invariantul i_3 obţinem că numărul ponderat de mărci al reţelei rămâne constant la producerea oricărei din cele 5 tranziţii ale reţelei adică
$\forall \mu_1, \mu_2$ marcări ale reţelei încât $\exists t \in T$ cu $\mu_1[t > \mu_2$ avem $\mu_1 \cdot i_3 = \mu_2 \cdot i_3$.

Analog invariantul i_4 va scoate în evidenţă o regularitate în ce priveşte locaţiile s_2, s_3 şi s_5 în timpul evoluţiei reţelei. Se observă că prin producerea lui t_1 locaţiile s_2 şi s_3 primesc totdeauna acelaşi număr de mărci şi cum marca din s_2 se transferă, prin producerea lui t_2, în s_5, observăm că producându-se t_5 din s_3 şi s_5 este totdeauna scos acelaşi număr de mărci. Astfel numărul de mărci din s_3 variază în acelaşi mod ca suma numărului de mărci din s_2, s_3. În felul acesta $\forall \mu_0$ astfel încât $\mu_0(s_2) = \mu_0(s_3) = \mu_0(s_5) = 0$ şi $\forall \mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$ avem $\mu \cdot i_4 = \mu_0 \cdot i_4 = 0$.

Lema 1. *Fie i_1, i_2 S-invarianţi ai PT-reţelei Petri Σ şi $n_1, n_2 \in Z$. Atunci $n_1 i_1 + n_2 i_2$ este S-invariant al reţelei.*

Demonstratie.

Evident $\Delta(n_1 i_1 + n_2 i_2) = \Delta(n_1 i_1) + \Delta(n_2 i_2) = n_1 \Delta i_1 + n_2 \Delta i_2 = 0$.

Lema 2. *Fie* Σ *o PT-rețea Petri; i un S-invariant pozitiv al său și fie* $A=\{s\in S / i(s)>0\}$. *Atunci* $A^* = {}^*A$.

Demonstrație

Dacă $\exists t\in A^*\setminus {}^*A \Rightarrow t\in A^*$ și $t\notin {}^*A \Rightarrow \exists s\in A$ încât $t\in s^*$ și $\forall s'\in A, t\notin {}^*s' \Rightarrow \exists s\in A$ încât $\Delta(s,t)=-\Pr e(s,t)<0$ și $\forall s'\in A$, $\Delta(s',t)=Post(s',t)\le 0$. Atunci evident $\Delta(\cdot,t)C_A<0$. Cum i este S-invariant pozitiv $\Rightarrow C_A\le i$ și deci $\Delta(\cdot,t)\cdot C_A \ge \Delta(\cdot,t)\cdot i$. Astfel $\exists t\in T$ încât $\Delta(\cdot,t)\cdot i<0$, ceea ce contrazice că i este S-invariant($\Delta\cdot i=0$). Deci $A^*\setminus {}^*A=\emptyset$ adica $A^*\subseteq {}^*A$.

Analog se demonstrează că ${}^*A\setminus A^*=\emptyset \Rightarrow {}^*A\subseteq A^*$.

Teorema 3. *Fie* $\Sigma_M=(S,T,\Pr e,Post,\mu_0)$ *o PT-rețea Petri marcată. Atunci pentru orice* $\mu\in A(\Sigma_M,\mu_0)$ *și pentru orice S-invariant i al lui* Σ_M *avem* $\mu\cdot i=\mu_0\cdot i$.

Demonstrație. Fie $\mu_1,\mu_2\in A(\Sigma_M,\mu_0)$ și fie $t\in T$ încât $\mu_1[t>\mu_2$. Atunci $\mu_2=\mu_1+\Delta(\cdot,t)$. Cum $\Delta(\cdot,t).i=0$ (i este S-invariant) avem $\mu_2.i=(\mu_1+\Delta(\cdot,t)).i=\mu_1.i+\Delta(\cdot,t).i=\mu_1.i$.

Acum dacă $\mu\in A(\Sigma_M,\mu_0)\Rightarrow \exists\mu_1,\mu_2,...\mu_{k-1}$ și $t_1,t_2,...t_k$ încât $\mu_0[t_1>\mu_1[t_2>\mu_2...\mu_{k-1}[t_k>\mu$.

Conform celor de mai sus rezultă că $\mu_0 i=\mu_1 i=...=\mu\cdot i\Rightarrow \mu_0 i=\mu\cdot i$.

Se observă că pentru ca reciproca teoremei de mai sus să fie advărată este necesar ca fiecare tranziție să se poată produce cel puțin o dată. În particular acest lucru este valabil în rețele Petri viabile[2].

Teorema 4. *Fie* Σ_M *o rețea Petri marcată viabilă și fie* $i\colon S\to Z$ *un vector încât pentru orice* $\mu\in A(\Sigma_M,\mu_0)$ *avem* $\mu_0\cdot i=\mu\cdot i$. *Atunci i este un S-invariant.*

Demonstrație. Pentru ca i să fie invariant trebuie să demonstrăm că $\Delta\cdot i=0 \Leftrightarrow \forall t\in T, \Delta(\cdot,t)\cdot i=0$.

Fie $\forall t\in T$ și $\forall\mu\in A(\Sigma_M,\mu_0)$ încât *t* să fie permisă la marcarea μ. Fie μ' marcarea obținută prin producerea lui *t*. Atunci $\mu[t>\mu'$ si $\mu'=\mu+\Delta(\cdot,t)$. Rezultă $\mu'\cdot i=\mu\cdot i+\Delta(\cdot,t)\cdot i$ și cum $\mu'\cdot i=\mu\cdot i$, obținem $\Delta(\cdot,t)\cdot i=0$.

Corolar 3. *Fie* Σ *o rețea Petri marcată viabilă și fie* $i\in Z^{|s|}$ *.Atunci i este S-invariant al lui* $\Sigma \Leftrightarrow \forall\ \mu\in A(\Sigma_M,\mu_0)$, $\mu.i=\mu_0 i$.

Demonstrație. Rezultă din teoremele 3 și 4.

Corolar 4. *Fie* Σ *o PT-rețea Petri marcată și* $A\subseteq S$ *o mulțime de locații al cărui vector caracteristic este un S-invariant. Atunci pentru* $\forall\mu\in A(\Sigma_M,\mu_0)$ *avem* $\sum_{s\in A}\mu(s)=\sum_{s\in A}\mu_0(s)$.

Demonstrație. Dacă C_A, vectorul caracteristic al lui A este un S-invariant rezultă conform Teoremei 2 că $\mu\cdot C_A=\mu_0\cdot C_A \Leftrightarrow$

$$\sum_{s\in A}\mu(s)\cdot C_A(s)=\sum_{s\in A}\mu_0(s)\cdot C_A(s) \Leftrightarrow \sum_{s\in A}\mu(s)=\sum_{s\in A}\mu_0(s).$$

Să vedem mai departe care ar fi dependența dintre mărginirea locațiilor unei rețele și apartenența lor la anumiți invarianți ai rețelei.

Definiția 3. *Fie* $\Sigma_M = (S, T, \Pr e, Post, \mu_0)$ *o PT-rețea Petri marcată. Atunci* Σ *este mărginită* $\Leftrightarrow \mu_0$ *este finită și* $\exists n \in \mathbf{N}$ *încât pentru* $\forall \mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$ *și* $\forall s \in S$ *avem* $\mu(s) \leq n$.

Definiția 4. *O PT-rețea Petri* Σ *este acoperită prin S-invarianți* $\Leftrightarrow$ *pentru orice locație* $s \in S$ *există un S-invariant pozitiv i al lui* Σ *încât* $i(s) > 0$.

Propoziția 1. *Fie* Σ *o PT-rețea Petri acoperită prin S-invarianți. Atunci există un S-invariant i al rețelei încât* $i(s) > 0$, $\forall s \in S$.

Demonstrație. Din ipoteză pentru fiecare $s \in S$ există un invariant i_s pozitiv încât $i_s(s) > 0$. Evident că dacă luăm acum $i = \sum_{s \in S} i_s$ acesta este, conform lemei 1, un S-invariant si $i(s') = \sum_{s \in S} i_s(s') \geq i_{s'}(s') > 0$.

Teorema 5. *Fie* $\Sigma_M = (S, T, \Pr e, Post, \mu_0)$ *o PT-rețea Petri marcată cu* μ_0 *finită. Dacă* Σ_M *este acoperită prin S-invarianți atunci ea este mărginită.*

Demonstrație. Fie $s_0 \in S$ și fie i un S-invariant pozitiv cu $i(s) > 0$, $\forall s \in S$ (acesta există conform propoziției 17). În particular $i(s_0) > 0$. Fie acum $\forall \mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$; deoarece $\mu(s_0) \cdot i(s_0) \leq \sum_{s \in S} \mu(s) \cdot i(s) = \mu \cdot i = \mu_0 \cdot i$ (din teorema 11), rezultă că $\mu(s_0) \leq \dfrac{\mu_0 i}{i(s_0)}$, adică $\forall s_0 \in S$ este mărginită. Vom lua acum $n = \max_{s \in S} \dfrac{\mu_0 i}{i(s)}$.Evident pentru orice $s \in S$ avem $\mu(s) \leq \dfrac{\mu_0 i}{i(s_0)} \leq n$ și astfel Σ_M este mărginită.

Observația 2. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată chiar dacă Σ este o rețea Petri particulară, cum se vede pe rețeaua din fig.4, unde avem o PT-rețea Petri viabila[2] și 1-mărginită(binară) ai cărei S-invarianți sunt dați în fig.5. Se observă că Σ nu este acoperită prin S-invarianți deoarece există $s_4 \in S$ încât $i(s_4)$ nu este strict pozitiv pentru orice $i \in \{i_1, i_2, i_3\}$.

$$\text{Aici } \Delta = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{și } \mu_0 = (1,1,0,1,0)^t$$

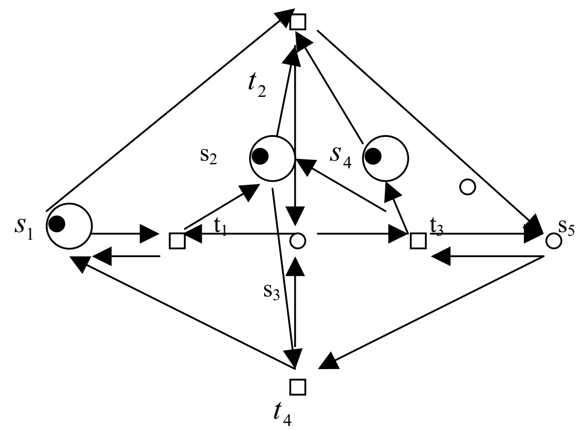

Fig.4 $\sum$ mărginită şi neacoperită prin S-invarianţi

	I_1	I_2	I_3
S_1	1	0	1
S_2	0	1	1
S_3	0	1	1
S_4	0	0	0
S_5	1	0	1

Fig.5 S-invarianţii reţelei din fig. 4

3. **Aspecte practice**

Vom prezenta în continuare o modalitate de studiu a anumitor proprietăţi ale modelului proceselor unui sistem de operare prin utilizarea S-invarianţilor unei reţele Petri care modelează acest sistem.

Considerăm un sistem de operare în care n procese au acces la un buffer atât pentru citire cât şi pentru scriere. Dacă nici un proces nu foloseşte bufferul pentru scriere presupunem că sunt permise la citire cel mult $k \leq n$ procese. Accesul la buffer pentru scriere este permis numai dacă nici un alt proces nu foloseşte bufferul pentru citire sau scriere.

Astfel observăm că fiecare proces poate fi în una din următoarele 5 stări:

s_0 = starea inactivă;
s_1 = pregătit pentru citire;
s_2 = citire propriu-zisă;
s_3 = pregătit pentru scriere;
s_4 = scriere propriu-zisă;

Putem modela acest sistem pentr-o reţea Petri ca în fig.6 în care locaţia s_5 este o locaţie necesară pentru sincronizarea celor k procese ce pot folosi simultan bufferul în operația de citire iar tranzitiile t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 permit trecerea proceselor dintr-o stare în alta, având semnificațiile ce rezultă din figură.

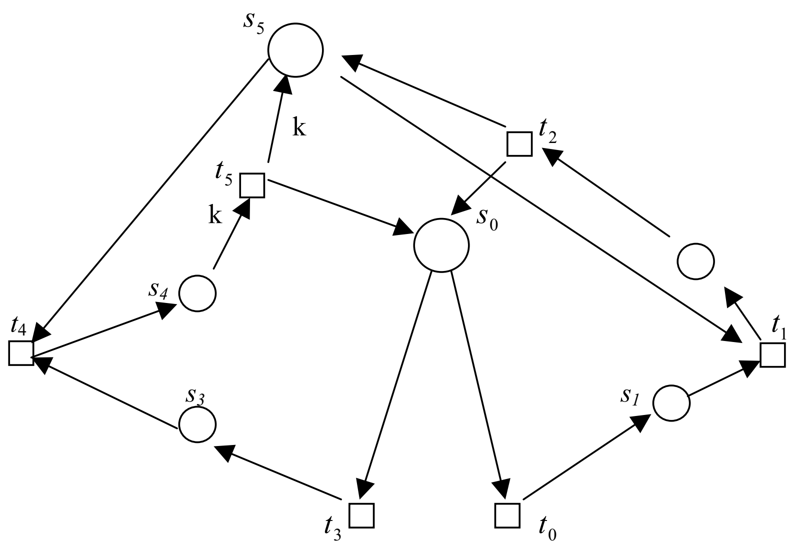

Fig.6 Rețea Petri asociată proceselor unui sistem de operare

În starea inițială toate cele n procese sunt inactive şi k procese pot fi permise simultan să aibă acces la buffer pentru citire întrucât nici un proces nu foloseşte bufferul la scriere. Vom semnala aceasta luând ca marcă inițială $\mu_0 = (n,0,0,0,0,k)^t$, marcare pe care în desen am reprezentat-o punând valorile n şi k în locațiile corespunzătoare.

Se observă că operatorul de incidență Δ este:

$$\Delta = \begin{array}{c|cccccc} & t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \hline S_0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ S_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ S_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ S_5 & 0 & -1 & 1 & 0 & -k & k \end{array}$$

Rezolvând sistemul de ecuații $\Delta^t \cdot x = 0$ obținem doi S-invarianți ai rețelei şi anume $i_1 = (1,1,1,1,1,0), i_2 = (0,0,1,0,k,1)$. Mai departe vom interpreta cei doi invarianți.

Folosind corolarul 4 pentru i_1 avem că

$$\forall \mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)\,,\ \sum_{i=0}^{4} \mu(s_i) = \sum_{i=0}^{4} \mu_0(s_i) = n$$

Analele Universității SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

ceea ce înseamnă că în întreaga evoluție a rețelei numărul proceselor este constant și fiecare este în una din cele 5 stări.

Folosind teorema 3 pentru i_2 avem că $\forall \mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$, $\mu \cdot i_2 = \mu_0 \cdot i_2 \Leftrightarrow \mu(s_2) + k \cdot \mu(s_4) + \mu(s_5) = \mu_0(s_2) + k \cdot \mu_0(s_4) + \mu_0(s_5) = k$ deci $\mu(s_2) + k \cdot \mu(s_4) + \mu(s_5) = k$; de aici rezultă următoarele:

1. $\mu(s_2) + \mu(s_5) = k(1 - \mu(s_4)) \Rightarrow \mu(s_4) \le 1$, deci s_4 conține cel mult o marcă, ceea ce spune că la fiecare moment cel mult un proces are acces la buffer în operația de scriere.

2. Dacă $\mu(s_4) = 1$ atunci din 1 rezultă că $\mu(s_2) + \mu(s_5) = 0$, adică $\mu(s_2) = 0$ și $\mu(s_5) = 0$. Aceasta spune că atunci când un proces folosește bufferul pentru scriere nici un alt proces nu-l poate folosi la citire în întreaga evoluție a rețelei.

3. Dacă $\mu(s_4) = 0$ rezultă din 1 că $\mu(s_2) + \mu(s_5) = k$, deci $\mu(s_5) = k - \mu(s_2)$, echivalent cu $\mu(s_2) \le k$. Această relație spune că dacă nici un proces nu folosește bufferul la scriere atunci cel mult k procese pot să-l folosească la citire în orice moment din evoluția rețelei, iar dacă și $\mu(s_5) = 0$ atunci $\mu(s_2) = k$ și deci *k* procese folosesc bufferul pentru citire.

Propoziția 2. *Fie* $\Sigma_M = (S, T, Pre, Post, \mu_0)$ *o PT-rețea Petri marcată asociată procesului de scriere și citire al unui sistem de operare în care* $\mu_0 = (n,0,0,0,0,k)^t$.

Dacă atașăm locațiilor $s_0 - s_5$ *niște capacități maxime date prin vectorul capacităților K=(n,n,k,k,1,k)*^{t} *atunci* Σ *este viabilă.*

Demonstrație. Ne vom folosi de invarianții rețelei determinați mai sus. Vom arăta că vectorul K al capacităților nu va împiedica producerea nici unei tranziții. Fie orice marcare μ accesibilă din marcarea inițială μ_0. Vom arăta că există cel puțin o tranziție permisă la această marcare. Dacă $\mu(s_0) + \mu(s_2) + \mu(s_4) > 0$ atunci cel puțin una din locațiile s_0, s_2 respectiv s_4 este marcată și astfel cel puțin una din t_0, t_3, t_2 sau t_5 este permisă. Dacă însă $\mu(s_0) + \mu(s_2) + \mu(s_4) = 0$ rezultă din invariantul i_1 că $\mu(s_1) + \mu(s_3) = n$, iar din i_2 că $\mu(s_5) = k$, ceea ce spune că cele n procese sunt în stările de așteptare gata pregătite pentru citire sau scriere, iar k dintre ele pot avea simultan acces la buffer pentru operația de scriere. Astfel tranzițiile t_1 sau t_4 se pot produce. Cu aceasta am demonstrat că vectorul capacităților nu împiedică producerea tranzițiilor. Pentru a demonstra că Σ este viabilă, va trebui să arătăm că $\forall t \in T$ și $\forall \mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$, există μ' accesibilă din μ la care t să fie permisă. Acum dacă la un anumit moment nici un proces nu este în stare inactivă, echivalent cu $\mu(s_0) = 0$ pentru un anumit $\mu \in A(\Sigma_M, \mu_0)$, atunci printr-o secvență de produceri $\mu(s_0) \ne 0$, adică cel puțin un proces va deveni inactiv, ceea ce va permite lui t_0 sau t_3 să se producă. Astfel tranzițiile t_0 și t_3 sunt viabile. Analog se demonstreză și viabilitatea celorlalte tranziții.

Sintetizând, putem observa că pentru sistemul de operare cu *n* procese modelat mai sus, au fost stabilite următoarele proprietăți:

P1. In întreaga evoluție a sistemului, numărul proceselor rămâne constant și fiecare se află în una din cele 5 stări fixate la început.

P2. La fiecare moment din evoluția sistemului cel mult un proces are acces la buffer pentru scriere.

P3. In întreaga evoluție a sistemului, când un proces folosește bufferul pentru scriere, nici un alt proces nu-l poate folosi pentru citire.

Analele Universității SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

P4. In întreaga evoluţie a sistemului, dacă nici un proces nu foloseşte bufferul pentru scriere atunci cel mult k procese pot să-l folosească pentru citire.

P5. Sistemul de operare modelat mai sus este viabil (Propoziţia 2).

P6. Sistemul de operare cu cele n procese rămâne viabil chiar şi în clasa reţelelor Petri cu capacităţi finite ale locaţiilor (Propoziţia 2).

BIBLIOGRAFIE

1. Popa M, *Clase speciale de reţele Petri*, Lucrările sesiunii ştiintifice a CCUB, Bucureşti, (1997)
2. Popa M, *Reţele Petri şi limbaje*, Al doilea colocviu naţional de limbaje, logică şi lingvistică matematică, Braşov, 183-192, (1988)
3. Popa M, *Concurrently firing in Pr-T Petri Nets,Application in solving Dijkstra's Problem*, Mathematical Reports, 47, 337-347, (1995)
4. Jucan T, Tiplea F L, *Reţele Petri-teorie şi practică*, Ed. Ademiei Române, Bucureşti, (1999)
5. Jucan T, *Modelarea sistemelor distribuite prin reţele Petri*, Restructurarea perfecţionării profesorilor de informatică 1997/1998, Ed. Computer Libris Agora, Cluj, 1998
6. Reisig W, *Petri Nets-An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, (1985)

Abstract: After a short introduction to the theory of systems, in general, and of Petri Nets in particular, the article begins with a characterization theorem of invariants of a marked and {0,1}-valued Petri net using the flux relation of the network. It then continues with a structural characterization of the network's invariants using its incidence operator, a characterization of S-invariants of a live Petri net, a sufficient condition of bounding a covered Petri net using invariants, etc. The article ends by presenting a concrete way of studying the properties of a system using S-invariants of the Petri net that models that system. The object in question is an operating system with n input and output processes that share a common buffer.