

PORTOFOLII OPTIME ÎN FINANȚE ȘI ACTUARIAT

MANUELA GHICA
Universitatea Spiru Haret

Rezumat: În acest articol sunt prezentate câteva rezultate privind portofoliile optime atât pentru o piață financiară cât și pentru o piață de asigurări când funcția de utilitate este o mixtură exponențială.

Cuvinte cheie: portofoliu, rentabilitate, activ financiar, dividend, portofoliu optim, echilibru competițional.

1. INTRODUCERE

În acest articol vom prezenta câteva rezultate despre portofolii optime pentru o piață financiară și pentru o piață de asigurări. Vom considera în cazul unei piețe financiare n active financiare pe o perioadă de timp limitată a căror valori se cunosc. Vom arăta modele de selecție pentru portofolii optime bazate pe măsuri simetrice. În cazul pieței de asigurări considerăm un model standard de repartitie a riscului cu n agenți care pot negocia orice contract pe care se pot baza în formarea unui portofoliu. Vom discuta și vom da o caracterizare a unui echilibru competițional în ipoteza că un astfel de echilibru există. În încheiere este stabilită o teoremă care determină portofoliile optime și prețul de piață când funcția de utilitate este o mixtură exponențială.

2. PORTOFOLII OPTIME PENTRU O PIAȚĂ FINANCIARĂ

În analiza selecționării unor portofolii optime pe o piață financiară este necesar să introducem conceptul de rentabilitate. Relația care leagă conceptul de rentabilitate cu cel de risc este următoarea: o rentabilitate mare este însoțită de un risc mare și invers.

Conceptul de rentabilitate aplicată unui activ financiar este definit de două componente ale câștigului: dividendul net pe care îl aduce acest activ și creșterea valorii de piață în raport cu prețul de achiziție. Rentabilitatea unui activ financiar se definește în raport cu o perioadă de timp, în raport cu valoarea activului financiar la începutul și la sfârșitul perioadei de timp considerate și în raport cu valoarea dividendului produs de activul financiar de la sfârșitul perioadei de timp considerate.

Fie i , activul financiar pentru care dorim să calculăm rentabilitatea și fie h , lungimea perioadei de timp. Notăm cu $[t - h, t]$ perioada de timp considerată și cu $p_{t-h,i}$ (respectiv

$p_{t,i}$) valoarea activului financiar i de la începutul (respectiv la sfârșitul) perioadei de timp considerate. Dacă notăm cu $d_{t,i}$ valoarea dividendului produs de activul financiar la sfârșitul perioadei de timp considerate și cu $r_{t,i}$ rentabilitatea activului financiar i pe intervalul de timp considerat mai sus atunci este îndeplinită următoarea relație $r_{t,i} = \frac{p_{t,i} - p_{t-h,i} + d_{t,i}}{p_{t-h,i}}$.

În cazul în care perioada de timp considerată este $[t - kh, t]$, unde $k \geq 1$, atunci rentabilitatea activului financiar i este dată de următoarea relație:

$$r_{t,i}(k) = \frac{p_{t,i} - p_{t-kh,i} + d_{t,i}}{p_{t-kh,i}}.$$

Valorile obținute pentru rentabilitățile $r_{t,i}, r_{t-h,i}, r_{t-2h,i}, \dots, r_{t-kh,i}$ le putem considera componentele unei variabile aleatoare ξ_i , variabilă care poate fi considerată rentabilitatea activului financiar i . Considerând n active financiare atunci vectorul $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ devine vectorul aleator al rentabilității celor n active financiare, numit și *piața financiară*. Definim următoarele caracteristici pentru vectorul pieței financiare:

1. Dacă notăm cu $\mu_i = E[\xi_i]$, $i = 1, \dots, n$, atunci vectorul $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ va fi numit vectorul de medii.
2. Dacă notăm cu $c_{ij} = E((\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j))$ atunci $C = (c_{ij})$ este matricea de covarianță a vectorului aleator $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Vom prezenta mai jos modele de selecție a portofoliului bazate pe măsuri simetrice: dispersia și abaterea medie absolută. Aici se încadrează modelele Markowitz [3], [4] sau modele de tip Konno Yamakazi [5]. Acest tip de modele folosesc faptul că riscul politicii de investiție este definit ca dispersia profitului total.

Considerăm un individ care dispune de o sumă de bani pe care vrea să o investească în n active financiare care pot aparține societăților cotate la bursă, sau pot reprezenta titluri de valoare la fonduri mutuale sau la societăți de investiții financiare etc. Fie x_j suma de bani care se investește în activul financiar j , $j=1, 2, \dots, n$. Se presupune un fapt nerealist că activele financiare sunt infinit divizibile, i.e., un investitor poate cumpăra dintr-un activ financiar orice parte exprimată printr-un număr real pozitiv. Este evident că în realitate cumpărarea unor fracțiuni de active financiare este nepermisă deoarece se poate cumpăra de la bursă doar număr întregi de acțiuni. Presupunem că suma de bani de care dispune investitorul este o constantă notată cu M și că vectorul $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ care descrie o anumită politică de investiție satisface restricțiile :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = M \\ x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

Vectorul x care satisface aceste restricții va fi numit *portofoliu*. Pentru un portofoliu definit astfel introducem noțiunea de profit corespunzător și anume:

$$V(x) = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \quad (2)$$

În cazul în care valorile ξ_i sunt presupuse constante date atunci determinarea unui optim în politica de investiții revine la o problemă clasică de programare liniară. Dar această soluție nu este suficientă deoarece în practică ξ_i sunt variabile aleatoare și atunci se impune estimarea vectorului mediilor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ și a matricei de covarianță $C = (c_{i,j})$ prin metode de statistică matematică [7].

Vom introduce termenii de *medie a profitului pentru portofoliul x* :

$$E(V(x)) = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \quad (3)$$

și *dispersie a profitului pentru portofoliul x* :

$$D^2(V(x)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad (4)$$

În prima lucrare de acest gen, profesorul H. Markowitz studiază riscul politicii de investiție în raport cu termenii dispersiei profitului investiției.

Problema revine la a calcula un portofoliu care să aibă un risc minim și în același timp profitul obținut să fie cât mai mare, eventual cu restricția: să fie mai mare decât un prag dat.

Această problemă a selecției portofoliului optim se formulează sub forma unei probleme de programare pătratică parametrică:

$$P_1(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \right) \\ \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \alpha M \\ \sum_{j=1}^n x_j = M \\ 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j=1,2,\dots,n \end{array} \right.$$

Valoarea α se consideră a fi un prag minim pentru rentabilitatea cerută de investitor, iar problema de minimizare formulată anterior este condiționată de acest prag. Problema $P_1(\alpha)$ este o problemă de optimizare patrică cu funcția obiectiv definită de o formă pătratică semipozitiv definită și cu restricții liniare. Mulțimea soluțiilor admisibile pentru această problemă este nevidă dacă $\alpha M \leq \max_{1 \leq i \leq n} (\mu_i)$ și în plus are chiar soluție optimă dacă matricea de covarianță este pozitiv definită.

Alt tip de experiență cu care se poate întâlni un investitor este să dorească găsirea unui portofoliu care să aibă un profit mediu maxim pentru un risc mai mic

decât un prag dat. Problema găsirii unui portofoliu optim se poate formula ca o problemă de programare parametrică cu funcția obiectiv liniară și restricții pătratice:

$$P_2(\beta) \left\{ \begin{array}{l} \max \left(\sum_{j=1}^n \mu_j x_j \right) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \leq \beta \\ \sum_{j=1}^n x_j = M \\ 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j=1,2,\dots,n \end{array} \right.$$

Vom considera în continuare funcția obiectiv $f_\delta(x)$, unde $\delta \in [0,1]$ este un parametru a cărui mărime relativă descrie importanța pe care o acordăm fiecăruia din cei doi termeni de mai jos.

$$f_\delta(x) = (1-\delta)x^T Cx - \delta\mu^T x \quad (5)$$

Problema de optimizare care descrie acest fenomen se va numi model de optimizare a compromisului risc-profit:

$$P_3(\delta) \left\{ \begin{array}{l} \min f_\delta(x) \\ \sum_{j=1}^n x_j = M \\ 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j=1,2,\dots,n \end{array} \right.$$

Valoarea parametrului δ este direct proporțională cu atitudinea investitorului în fața riscului, de exemplu, dacă $\delta=0$ ar însemna că investitorul dorește să obțină un profit mai sigur, scutit de fluctuații, iar dacă, dimpotrivă, $\delta=1$, ar demonstra lipsa de teamă a investitorului în fața riscului și dorința acestuia de maximizare a profitului mediu.

Problema $P_3(\delta)$ este o problemă de programare parametrică convexă deoarece matricea de covarianță este pozitiv semidefinită și soluția, pentru un δ dat, are proprietatea că nu există o structură a investițiilor care la aceeași dispersie să dea profit mediu mai mare și nici la același profit mediu să aibă o dispersie sau risc cu o valoare mai mică.

O diminuare a riscului se poate realiza printr-o diversificare a portofoliului, adică portofoliul să conțină mai multe active.

Componentele matricei de covarianță $C = (c_{ij})$ a vectorului aleator $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, unde $c_{ij} = E((\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j))$ reprezintă covarianțele dintre rentabilitățile ξ_i și ξ_j . Dacă aceste două rentabilități se mișcă în același sens atunci c_{ij} este pozitivă altfel va fi negativă. Din formula riscului de investiție

$$D^2(V(x)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \text{ observăm că riscul va scădea dacă în portofoliu se vor}$$

achiziționa mai multe active finanaciare a căror rentabilitate se mișca în sens contrar astfel încât covarianțele corespunzătoare să fie negative. Așadar prețul plătit pentru reducerea riscului investiției este scăderea profitului.

Presupunem că $x_i \geq 0, i=1,2,\dots,n$ sunt considerate ca rapoarte între suma investită în active și suma totală de care dispune investitorul, avem deci $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. În

acest caz expresia riscului de investiție este:

$$\begin{aligned} D^2(V(x)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{c_{ii}} \sqrt{c_{jj}} x_i x_j = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{c_{ii}} x_i \right)^2 \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{c_{ii}} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \max_{1 \leq i \leq n} c_{ii} = \max_{1 \leq i \leq n} (D^2(\xi_i)) \end{aligned} \quad (6)$$

Este evident din relațiile de mai sus că riscul portofoliului este mai mic decât cel mai mare dintre riscurile activelor financiare care îl compun.

Așa cum am prezentat mai sus se observă că Markowitz a definit riscul unui portofoliu cu ajutorul dispersiei profitului corespunzător acestuia, în schimb alți statisticieni cum ar fi Konno și Yamazaki au propus abaterea medie absolută ca o măsura a riscului sau prin a semideviației medii a profitului.

3. PORTOFOLII OPTIME PENTRU PIAȚA DE ASIGURĂRI

Fie o mulțime de n agenți și o relație de preferință \geq_i definită pe o mulțime de variabile aleatoare. Aceste preferințe sunt reprezentate prin funcția de utilitate medie von Neumann-Morgenstern, i.e., există o mulțime de funcții continue $u_i : R \rightarrow R$ astfel încât: $X \geq_i Y \Leftrightarrow Eu_i(X) \geq Eu_i(Y)$. Presupunem ca preferințele sunt monotone și că există aversiune față de risc, deci, avem $u_i'(\omega) > 0$ și $u_i''(\omega) \leq 0$, pentru orice ω aparținând unui domeniu relevant. O variabilă aleatoare X_i numită portofoliu inițial este atribuită fiecărui agent i , i.e., există un spațiu de probabilitate (Ω, K, P) astfel încât fiecărui agent i îi este atribuită valoarea $X_i(\omega)$ pentru $\omega \in \Omega$. Este necesar să presupunem că atât valoarea medie cât și dispersia există pentru aceste portofolii inițiale, ceea ce poate fi scris ca $X_i \in L^2(\Omega, K, P)$ sau pe scurt vom scrie $X_i \in L^2$.

Dacă presupunem că agenții pot negocia orice contract care li se acordă atunci vom avea o nouă mulțime de variabile aleatoare $Y_i, i \in I$ reprezentând posibile plăți finale pentru diferiți membri din grup, sau valoarea portofoliului final. Aceste tranzacții determină prețul de piață, valoare exprimată prin $\pi(Z) (\forall) Z \in L^2$.

Se observă că funcția π definită pe L^2 este liniară, i.e., pentru orice două constante $a, b \in R^2$ să fie adevărată relația: $\pi(aY + bZ) = a\pi(Y) + b\pi(Z)$. În acest caz este

suficient să considerăm că $\pi(Y+Z) > \pi(Y) + \pi(Z)$ pentru orice variabile aleatoare $Y, Z \in L^2$. Putem presupune proprietatea de infinit divizibilitate pentru orice portofoliu, adică un agent de asigurări poate face o poliță de asigurări pentru variabila $Y+Z$ și apoi să facă reasigurări separat pentru Y , respectiv pentru Z . În final presupunem pentru funcționala π condiția de pozitivitate, și anume $\pi(Z) \geq 0, (\forall) Z \geq 0$ P-a.s.

Dacă o funcțională liniară, continuă și pozitivă pe un spațiu $L^p, 1 \leq p \leq \infty$ este mărginită, atunci folosind teorema de reprezentare a lui Riesz putem concluda că există o unică variabilă aleatoare $\xi \in L^2$ astfel încât:

$$\pi(Z) = E(Z\xi), \quad (\forall) Z \in L^2$$

Definiția 1. Dacă $\sum_{i=1}^n Z_i \leq \sum_{i=1}^n X_i =: X_M$ atunci vectorul $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ se numește *vector posibil*.

O situație care apare pentru fiecare agent i este găsirea unui optim pentru următoarea relație:

$$\sup_{Z_i \in L^2} Eu_i(Z_i) \text{ astfel încât}$$

$$\pi(Z_i) \leq \pi(X_i) \quad . \quad (7)$$

Este necesar să se demonstreze existența (și unicitatea) soluțiilor relației (7). Dacă mulțimea $\{Z_i \in L^2 : Eu_i(Z_i) < \infty, \pi(Z_i) \leq \pi(X_i)\}$ este mărginită (în norma L^2) atunci existența este garantată. De asemenea, proprietatea de strict concavitate pentru funcția de utilitate u_i este suficientă pentru unicitate [7].

Definiția 2. Un *echilibru competițional* este o pereche (π, Y) unde π este prețul de piață și $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ este un vector posibil astfel încât pentru fiecare i, Y_i

$$\text{verifică relația (7) și proprietatea } \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n X_i \text{ .}$$

Pentru π dat atunci vectorul $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ se numește *vector echilibrat* dacă (π, Y) este un echilibru competițional. În acest caz un Y_i se numește *portofoliu optim* pentru agentul $i, i \in I$.

În continuare vom caracteriza un echilibru competițional presupunând că el există. Vom presupune că X_i nu este identic zero, și că un echilibru unic există[2]. De asemenea, vom presupune că $\pi(X_i) > 0$ pentru fiecare i . În acest caz vom prezenta următoarea teoremă:

Teorema 1. [1] Dacă relația de preferință atribuită agenților este astfel ca $u_i'(\omega) > 0$ și $u_i''(\omega) \leq 0$ pentru $i \in I$, și există un echilibru competițional (π, Y) , unde

$\pi(Y_i) > 0$ pentru fiecare i . Atunci echilibrul este caracterizat de existența unor constante pozitive α_i , $i \in I$, astfel încât pentru vectorul echilibrat (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) avem $u'_i(Y_i) = \alpha_i \xi$, a.s. pentru $(\forall) i \in I$ (8)

unde α_i este utilitatea marginală de preț și ξ este reprezentarea Riesz a funcționalei de preț π .

În teorema următoare vom da formula pentru prețurile de piață și relația între portofoliile optime Y_i și $\sum_{i=1}^n X_i =: X_M$ în cazul în care utilitățile marginale sunt sub forma unor mixturi exponențiale.

Teorema 2. Fie utilitățile marginale mixturi exponențiale de forma $u'_i(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{a_i}} + \frac{1}{2} e^{-2\frac{z}{a_i}}$, atunci portofoliul optim Y_i este afin în X_M și prețul de piață

$$\pi(Z) = \frac{1}{2} h(a_1, \dots, a_n, X_1, \dots, X_n) \left(E \left[Z e^{-\frac{X_M}{A}} \right] + E \left[Z e^{-2\frac{X_M}{A}} \right] \right)$$

unde

$$h(a_1, \dots, a_n, X_1, \dots, X_n) = \left(-\frac{1}{2} E \left[Z e^{-\frac{X_M}{A}} \right] + \sqrt{\frac{1}{4} E^2 \left[e^{-\frac{X_M}{A}} \right] + 2 E \left[e^{-2\frac{X_M}{A}} \right]} \right) \left(E \left[e^{-2\frac{X_M}{A}} \right] \right)^{-1}$$

Demonstrație: Deoarece pentru fiecare $i \in I$ utilitățile marginale sunt $u'_i(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{a_i}} + \frac{1}{2} e^{-2\frac{z}{a_i}}$ folosind caracterizarea (8) obținem $\frac{1}{2} e^{-\frac{z}{a_i}} + \frac{1}{2} e^{-2\frac{z}{a_i}} = \alpha_i \xi$, a.s., $i \in I$.

De asemenea obținem $\lambda_i e^{-\frac{Y_i}{a_i}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\xi}$ unde $\lambda_i = \frac{1}{\alpha_i}$. După ce logarităm și sumăm după i această ultimă relație, obținem:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{K-X_M}{A}} + e^{\frac{K-X_M}{A}} \right), \text{ a.s., unde } K := \sum_{i=1}^n a_i \ln \lambda_i, A := \sum_{i=1}^n a_i.$$

În plus, obținem că portofoliile optime pot fi scrise $Y_i = \frac{a_i}{A} X_M + b_i$, unde

$$b_i = a_i \ln \lambda_i - a_i \frac{K}{A}, i \in I.$$

Pentru determinarea vectorului $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ impunem restricții de buget:

$$E \left[Y_i \left(\frac{1}{2} e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2} e^{2\frac{K-X_M}{A}} \right) \right] = E \left[X_i \left(\frac{1}{2} e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2} e^{2\frac{K-X_M}{A}} \right) \right], i \in I,$$

din care obținem $b_i = m_i \cdot n_i^{-1}$ unde

$$m_i = E \left[X_i \left(\frac{1}{2} e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2} e^{\frac{2K-X_M}{A}} \right) - \frac{a_i}{A} X_M \left(\frac{1}{2} e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2} e^{\frac{2K-X_M}{A}} \right) \right] \text{ și}$$

$$n_i = E \left(\frac{1}{2} e^{\frac{K-X_M}{A}} + \frac{1}{2} e^{\frac{2K-X_M}{A}} \right), \quad i \in I.$$

Dacă impunem normalizarea $E\{\xi\} = 1$ obținem

$$e^{\frac{K}{A}} = \left(-\frac{1}{2} E \left[e^{-\frac{X_M}{A}} \right] + \sqrt{\frac{1}{4} E^2 \left[e^{-\frac{X_M}{A}} \right] + 2E \left[e^{-\frac{2X_M}{A}} \right]} \right) \left(E \left[e^{-\frac{2X_M}{A}} \right] \right)^{-1} \quad (9)$$

În acest caz λ_i sunt date de

$$\lambda_i = e^{\frac{b_i}{a_i}} \left(-\frac{1}{2} E \left[e^{-\frac{X_M}{A}} \right] + \sqrt{\frac{1}{4} E^2 \left[e^{-\frac{X_M}{A}} \right] + 2E \left[e^{-\frac{2X_M}{A}} \right]} \right) \left(E \left[e^{-\frac{2X_M}{A}} \right] \right)^{-1}, \quad i \in I.$$

Astfel prețul de piață este dat de următoarea formulă:

$$\pi(Z) = E[Z\xi] = E \left[\frac{1}{2} Z \left(e^{\frac{K-X_M}{A}} + e^{\frac{2K-X_M}{A}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{K}{A}} E \left[Z e^{-\frac{X_M}{A}} \right] + e^{\frac{2K}{A}} E \left[Z e^{-\frac{2X_M}{A}} \right] \right)$$

$(\forall) Z \in L^2$ unde valoarea constantei $e^{\frac{K}{A}}$ este dată de relația (9).

BIBLIOGRAFIE

1. Aase, K.K., *Perspectives of risk sharing*, Scandinavian Actuarial J. (2002).
2. Dana, R.A., *Existence, uniqueness and determinacy of equilibrium in C.A.P.M. with a riskless asset*, Journal of mathematical Economics 32. (1999)
3. Markowitz, H.M., *Portfolio selection*, J. of Finance 8 (1952).
4. Markowitz, H.M., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons, (1959).
5. Konno, H., Yamakazi, H., *Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo Stock Market*, Management Science, 37, (1991).
6. Nielson, L.T., *Uniqueness of equilibrium in the classical capital asset pricing model*, Journal of financial and Quantitative Analysis, 23, (1988).
7. Preda V., Craiu V., *Inferență statistică pentru medii condiționate*, Ed. Universității București (1985).

Abstract: This paper starts with a paragraph which presents a classical portfolio selection model and the problems which must be solved by an investor when he wants to make an investment decision. In the following we present some results for a standard risk sharing model of reinsurance markets. In the end we consider the case of marginal mixture exponential utility functions.